Satz von Riemann-Roch

von

Maikel Hajiabadi

Bachelorarbeit in Mathematik
vorgelegt dem Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik (FB 08)
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz
am 28. August 2018

1. Gutachter: Prof. Dr. Kang Zuo
2. Gutachter: Dr. Abolfazl Mohajer

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Mainz, den 28.08.2018

Maikel Hajiabadi

Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
Johannes Gutenberg-Universität D-55099 Mainz
mhajiaba@students.uni-mainz.de

Der Satz von Riemann-Roch

Maikel Hajiabadi

2018

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

„Die Theorie der Riemannschen Flächen [, eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten,] verdankt ihren Ursprung der Tatsache, daß bei der analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionen längs verschiedener Wege verschiedene Funktionswerte entstehen können. Setzt man deshalb einen holomorphen Funktionskeim unbegrenzt analytisch fort, so entsteht eine im Allgemeinen mehrdeutige Funktion. Um wieder zu eindeutigen Funktionen zu gelangen, ersetzt an den Definitionsbereich durch eine über der komplexen Ebene gelegene mehrblättrige Fläche, die über jedem Grundpunkt soviele Punkte besitzt, wie die fortgesetzte analytische Funktion verschiedene Funktionskeime aufweist. Auf dieser „Überlagerungsfläche“ wird die analytische Funktion dann eindeutig. Abstrahiert von der Tatsache, daß die Fläche über der komplexen Ebene (oder Zahlenkugel) ausgebreitet ist, erhält man den allgemeinen Begriff, der Riemannschen Fläche als Definitionsbereich analytischer Funktionen einer Veränderlichen.“[1]

Im Rahmen dieser Arbeit werden zunächst Grundlagen der Topologie und der Funktionentheorie wiederholt und anschließend welche der Theorie der Riemannschen Flächen geschaffen, um einen zentralen Satz aus der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen zu beweisen, den **Satz von Riemann Roch**.
Jener liefert unter anderem eine Aussage über die Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen, deren Polstellenvielfachheit durch gewisse Vorgaben beschränkt ist.
Als kleinen weiteren Ausblick, wird im Anschluss der **Serresche Dualitätssatz** bewiesen, womit es möglich ist, eine äquivalente Aussage des Satzes von Riemann-Roch zu beweisen um daraufhin eine Anwendung des Satzes genauer zu beleuchten: **Die Einbettung des komplexen Torus in den Projektiven Raum** $\mathbb{P}^2$ als Nullstellenmenge eines kubisches Polynoms.

Im weiteren Ausblick wird jedoch nicht mehr jedes kleine Detail bewiesen. Dem interessierten Leser ist es überlassen, an gewissen Stellen des weiteren Ausblicks im Selbststudium aufkommende Fragen zu beantworten, jedoch ist ohne den weiteren Ausblick die Arbeit so verfasst, dass sie größtenteils von Studenten, welche die Vorlesungen Analysis 1 und 2, sowie die Vorlesungen Lineare Algebra 1 und 2 besucht haben, gut verstanden werden kann.

[1] Forster, Otto: Riemannsche Flächen

1 Grundlagen

Für die gesamte Arbeit seien I, J, K stets Indexmengen.

1.1 Funktionentheorie und Topologie

Definition 1.1.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.
Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar in z_0** $\in \mathbb{C}$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}, \text{ wobei } h \in \mathbb{C}, \text{ existiert.}$$

Ferner heißt eine Abbildung **f holomorph in z_0** $\in U$
$:\Leftrightarrow \exists V \subseteq U$ offen, $z_0 \in V : f$ komplex differenzierbar $\forall z \in V$.
Ist f auf ganz U holomorph, so spricht man auch von einer **holomorphen Funktion**.

Satz & Definition 1.1.2.

i) Unter den ***Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*** *(C.R.DGL) versteht man das folgende System von Differentialgleichungen reellwertiger Funktionen $u, v :\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

1) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$

2) $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

ii) Mittels Identifikation der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ gilt nach einem Resultat aus der Funktionentheorie:

f=(u,v) ist eine holomorphe Funktion $\Leftrightarrow u, v$ genügen der C.R.DGL

In diesem Fall gilt $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$.

Definition 1.1.3. Sei X eine Menge.
Eine Teilmenge $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ der Potenzmenge von X heißt **Topologie**, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

ii) $U, V \in \mathfrak{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{T}$

iii) $U_i \in \mathfrak{T}\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ wird **topologischer Raum** genannt und die Elemente $U \in \mathfrak{T}$ werden als **offene Mengen** bezeichnet.

Definition 1.1.4. Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.
Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, falls jedes Element $U \in \mathfrak{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{T}$ dargestellt werden kann, d.h.

$$U = \bigcup_{i\in I} B_i, B_i \in \mathfrak{B}\ \forall i \in I.$$

Definition 1.1.5. Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt **Hausdorffsch**
$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U, V \subseteq X$ offene Umgebungen von x bzw. y, s.d. $U \cap V = \emptyset$.

Definition 1.1.6. Seien $(X, \mathfrak{T}), (X', \mathfrak{T}')$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig in $\boldsymbol{a}$** $\in X$
$:\Leftrightarrow \forall V \subseteq Y$ offene Umgebung von $f(a)$ $\exists U \subseteq X$ offene Umg. von a, sodass $f(U) \subseteq V$.
Eine Funktion f heißt **stetig**, falls f in allen $a \in X$ stetig ist.

Bemerkung 1.1.7. Es gilt: $f : X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(V) \subseteq X$ offen $\forall V \subseteq Y$ offen.

Definition 1.1.8. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**
$:\Leftrightarrow f, f^{-1}$ sind bijektiv und stetig.
Existiert ein solcher Homöomorphismus, so heißen X und Y zueinander **homöomorph**.
Analog definiert man einen **Biholomorphismus**, falls f, f^{-1} bijektiv und holomorph sind. Hier heißen X und Y folglich **biholomorph**, in Zeichen: $\boldsymbol{X \approx Y}$

Definition 1.1.9. Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt **Mannigfaltigkeit der Dimension $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}_0$, falls folgende Axiome erfüllt sind:

i) X ist **lokal euklidisch**, d.h.
$\forall x \in X \; \exists U \subseteq X$ offene Umgebung von x so, dass $U \approx V \subseteq \mathbb{R}^n$.
Mit anderen Worten: Es existiert eine **Karte** $\varphi : U \xrightarrow{\approx} V, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

ii) X ist Hausdorffsch,

iii) $\mathfrak{T}$ hat eine abzählbare Basis.

2 Vorbereitung

2.1 Riemannschen Flächen

Definition 2.1.1. Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

1. Unter einer **komplexen Karte** auf X versteht man einen Homöomorphismus
$$\boldsymbol{\varphi : U \xrightarrow{\approx} V}, \text{ wobei } U \subseteq X \text{ offen, } V \subseteq \mathbb{C} \text{ offen sind.}$$
2. Zwei komplexe Karten $\varphi_i : U_i \to V_i, i = 1, 2$ heißen **biholomorph verträglich**, falls der Kartenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ biholomorph ist.
3. Ein **komplexer Atlas auf $\boldsymbol{X}$** ist ein System von Karten $\mathscr{U} = \boldsymbol{\{\varphi_i : U_i \to V_i\}}_{i\in I}$, für das gilt:
   i) $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = X$
   ii) $\varphi_i : U_i \to V_i$ sind paarweise biholomorph verträglich für alle $i \in I$
4. **Zwei Atlanten $\mathscr{U}, \mathscr{V}$** heißen **biholomorph verträglich**
:$\Leftrightarrow$ φ, Ψ sind biholomorph verträglich $\forall \varphi \in \mathscr{U}, \Psi \in \mathscr{V}$.

Bemerkung 2.1.2. Um die biholomorphe Verträglichkeit zweier komplexer Atlanten $\mathscr{U} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i\in I}, \mathscr{V} = \{\Psi_j : U_j \to V_j\}_{j\in J}$ nachzuweisen, genügt es zu überprüfen, dass komplexe Karten $\varphi_i \in \mathscr{U}$ und komplexen Karte $\Psi_j \in \mathscr{V}$ existieren, welche die Mannigfaltigkeit X überdecken und paarweise biholomorph verträglich sind, da folglich für zwei beliebige Karten $\varphi_{i'} \in \mathscr{U}, \Psi_{j'} \in \mathscr{V}$, (überall auf X) gilt:
$\exists i \in I, j \in J : \varphi_i \circ \Psi_j^{-1}$ biholomorph
$$\Rightarrow (\varphi_{i'} \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \Psi_j^{-1}) \circ (\Psi_j \circ \Psi_{j'}^{-1}) = \varphi_{i'} \circ \Psi_{j'}^{-1} \text{ biholomorph,}$$
auf den entsprechenden Definitionsbereichen.

Bemerkung 2.1.3.

a) Sei $\varphi : U \to V$ eine kompl. Karte, $U_1 \subseteq U$ offen, $V_1 := \varphi(U_1)$
$\Rightarrow \varphi\big|_{U_1}, \varphi$ sind bih. verträglich, da $\varphi \circ \left(\varphi\big|_{U_1}\right)^{-1} = \left(\varphi\big|_{U_1} \circ \varphi^{-1}\right)\Big|_{V_1} = Id_{V_1}$
b) Biholomorphe Verträglichkeit zwischen komplexen Atlanten definiert eine Äquivalenzrelation, im folgenden bezeichnet $[\mathscr{U}]$ also die Äquivalenzklasse aller zu $\mathscr{U}$ biholomorph verträglichen Atlanten auf eine Mannigfaltigkeit X.

Definition 2.1.4. Unter einer **komplexen Struktur $\boldsymbol{\Sigma}$** $= [\mathscr{U}]$ auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X versteht man eine Äquivalenzklasse biholomorph äquivalenter Atlanten auf X.

Bemerkung. Die Definition von Riemannschen Flächen fordert, dass es sich bei der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit um eine **unberandete** Mannigfaltigkeit handelt. Die Theorie der berandeten Mannigfaltigkeiten wurde zwar auch bereits eingehend untersucht, wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht vertieft.

Bemerkung 2.1.5. Jede komplexe Struktur Σ auf X enthält einen eindeutig bestimmten **maximalen Atlas** $\mathscr{U}^*$, welchen man wie folgt gewinnt:

1. Beginne mit einem beliebigem Atlas $\mathscr{U} \in \Sigma$.
2. Füge zu $\mathscr{U}$ alle komplexen Karten aus X hinzu, die mit allen Karten aus $\mathscr{U}$ biholomorph verträglich sind, also
$\mathscr{U}^* := \{\varphi : U \to V \big| \ \varphi \textit{ Karte auf } X, \ \varphi \textit{ bih. verträglich mit allen } \Psi \in \mathscr{U}\}$.

Definition 2.1.6.
Ein solches Paar $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Sigma})$ wird als **Riemannsche Fläche** bezeichnet.
Meist schreibt man kurz X, falls klar ist, welche komplexe Struktur zugrunde liegt.

Vereinbarung 2.1.7.
Mit einer komplexen Karte auf einer Riemannschen Fläche X ist stets eine komplexe Karte des maximalen Atlas der komplexen Struktur von X gemeint.

Beispiel 2.1.8.

i) Die Gaußsche Zahlenebene $\mathbb{C}$ bildet mit $\Sigma = [id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}]$ eine Riemannsche Fläche.

ii) Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subseteq X$ ein Gebiet, d.h. eine offene, zusammenhängende Teilmenge, so wird Y in natürlicher Weise wieder zu einer Riemannschen Fläche, indem man die komplexe Struktur durch den Atlas definiert, der aus allen komplexen Karten $\varphi : U \to V$ auf X besteht, für die $U \subseteq Y$ gilt.

iii) Die **Riemannsche Zahlenkugel** $\mathbb{P}_1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mittels folgender Topologie zu einem kompakten topologischem Raum, welcher homöomorph zu S^2 ist:
$V \subseteq \mathbb{P}_1 \text{ offen} \Leftrightarrow \begin{cases} V \subseteq \mathbb{C} \text{ offen} \\ V = U \cup \{\infty\}; \text{ wobei } U^C \subseteq \mathbb{C} \text{ kompakt} \end{cases}$
$\mathbb{P}_1$ ist mittels der Äquivalenzklasse des Atlas, der aus den Karten

$$\varphi_1 : \mathbb{P}_1 \backslash \{\infty\} \to \mathbb{P}_1 \backslash \{\infty\}, z \mapsto z$$
$$\varphi_2 : \mathbb{P}_1 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}_1 \backslash \{0\}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & \textit{falls } x \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \textit{falls } z = \infty \end{cases}$$

besteht, eine kompakte Riemannsche Fläche.

Definition 2.1.9. Seien X_1, X_2, X Riemannsche Flächen, $Y \subseteq X$ offen.

1. Eine Abbildung $f : Y \to \mathbb{C}$ heißt **holomorphe Funktion**, falls für alle Karten φ auf X gilt: $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ ist holomorph im übliche Sinne.
   $\boldsymbol{\mathscr{O}(Y)} := \{f : Y \to \mathbb{C} | f \text{ } \textit{holomorph}\}$ bezeichnet Menge aller holomorphen Fkt. auf Y.

2. Sei $\varphi : U \to V$ ein Karte auf X, so nennt man φ auch **lokale Koordinate** und $\boldsymbol{(U, \varphi)}$ **Koordinatenumgebung** jedes Punktes $a \in U$.
   Sei $\varphi : U \to V$ Karte auf X, so ist φ eine komplexwertige Funktion auf U und holomorph, da $\varphi \circ \Psi^{-1}$ (bi-)holomorph für alle Karten Ψ auf X.
   In diesem Zusammenhang der lokalen Koordinate wird oft $\boldsymbol{z}$ **statt** $\boldsymbol{\varphi}$ verwendet.

3. Eine stetige Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt **holomorphe Abbildung**, falls für alle $\varphi_i : U_i \to V_i$ Karten auf X_1 und für alle $\Psi_j : U_j \to V_j$ Karten auf X_2 mit $f(U_i) \subseteq U_j$ gilt, dass
   $$\Psi_j \circ f \circ (\varphi_i)^{-1} : V_i \to V_j \text{ holomorph ist.}$$
   Eine Abbildung f heißt **biholomorph**, falls f, f^{-1} bij., holom. Abbildungen sind.
   $$X_1, X_2 \text{ heißen } \textbf{Isomorph} :\Leftrightarrow \exists f : X_1 \to X_2 \text{ biholomorph}$$

Warnung 2.1.10.
Generell wird zwischen holomorphen **Abbildungen** und **Funktionen** unterschieden. Im Spezialfall $X_2 = \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Abbildung auch eine holomorphe Funktion.

Bemerkung 2.1.11. Es gelten

1. $f : Y \to \mathbb{C}$ holomorph
   $\Leftrightarrow \exists \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ Familie von Karten auf X mit $Y \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ so, dass $f \circ \varphi_i^{-1}$ holomorph ist.

2. X, Y, Z Riemannsche Flächen, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ holomorphe Abbildungen $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ ist eine holomorphe Abbildung.

Da der Beweis des folgenden Satzes mehrere Sätze benötigt, wird dieser hier ohne Beweis aufgeführt:

Satz 2.1.12. *Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X ist jede holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konstant.*

Definition 2.1.13. Sei X Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen.
Eine auf einer offenen Teilmenge $Y' \subseteq Y$ definierte holomorphe Funktion heißt **meromorphe Funktion** auf Y, falls

i) $Y \backslash Y'$ besteht aus **isolierten Punkten**, d.h. falls $y \in Y \backslash Y'$, so existiert eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ von y, sodass $U \cap Y \backslash Y' = \{y\}$.

ii) $p \in Y \backslash Y' \Rightarrow \underset{x \to p}{lim} |f(x)| = \infty$.

$\mathscr{M}(\boldsymbol{Y}) := \{f : Y' \to \mathbb{C} | f \textit{ meromorph auf } Y\}$ bezeichne die Menge aller meromorphen Funktionen auf Y und die Elemente $p \in Y \backslash Y'$ bezeichnet man als **Polstellen** von f.

Bemerkung 2.1.14. Eine meromorphe Funktion f auf einer Riemannschen Fläche X besitzt <u>nur isolierte Nullstellen</u>, folglich ist $\mathscr{M}(X)$ ein Körper.
(Beweis via Identitätätssatz für Riemannsche Flächen.)

2.2 Garben

Vereinbarung 2.2.1. In diesem Unterkapitel ist, sofern nichts anderes erwähnt, mit X stets ein beliebiger topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ gemeint.

Definition 2.2.2.
Unter einer **Prägarbe** von Mengen auf X versteht man ein Paar $(\mathscr{F}, \varrho)$, wobei gelten

i) $\mathscr{F} = (\mathscr{F}(U))_{U \in \mathfrak{T}}$ Familie von Mengen.

ii) $\varrho = \left(\varrho_V^U\right)_{U,V \in \mathfrak{T}, V \subseteq U}$, Familie von "verträglichen" Einschränkungsabbildungen $\varrho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, d.h.

   a) $\varrho_U^U = Id_{\mathscr{F}(U)}$

   b) $\varrho_W^V \circ \varrho_V^U = \varrho_W^U$ für $W \subseteq V \subseteq U$

   Diese Abbildungen existieren **für alle** Inklusionen.

Bemerkung 2.2.3.
Analog werden Prägarben von abelschen Gruppen, Ringen, Vektorräumen usw. definiert, wobei ϱ eine Familie von **Homomorphismen** ist und und bei Gruppen z.B. $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$ als triviale Gruppe gesetzt wird.
Die Abbildungen in ϱ werden auch **Beschränkungshomomorphismen** genannt.
Ferner werden $(\mathscr{F}, \varrho)$ mit $\mathscr{F}$ und $\varrho_V^U(f)$ mit $\boldsymbol{f}_{|_{\boldsymbol{V}}}$ abgekürzt, wobei hier $f \in \mathscr{F}(U)$.

Definition 2.2.4. Sei $\mathscr{F}$ Prägarbe auf X, so heißt $\mathscr{F}$ **Garbe**, falls
$\forall U \subseteq X$ offen, $\forall (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U gelten:

i) $f, g \in \mathscr{F}(U) : f_{|_{U_i}} = g_{|_{U_i}} \; \forall i \in I \Rightarrow f = g$,

ii) Seien $f_i \in \mathscr{F}(U_i), i \in I$ vorgegeben mit $f_{i|_{U_i \cap U_j}} = f_{j|_{U_i \cap U_j}} \; \forall i, j \in I$
$\Rightarrow \exists f \in \mathscr{F}(U) : f_{|_{U_i}} = f_i \; \forall i \in I$ [eindeutig nach i)].

Falls überall lokale Übereinstimmung herrscht, soll dies also globale Übereinstimmung implizieren [*i*)] und ferner sollen sich lokale Elemente, deren Einschränkung auf dem gemeinsamen Bereich übereinstimmt, zu einem globalen Element "verkleben" lassen [*ii*)].
Im Folgenden wurd gelegentlich mit 1. bzw. 2. GA (Garbenaxiom) abgekürzt.

Beispiel 2.2.5.

a) Sei $(X, \mathfrak{T})$ topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen, ferner sei $\mathscr{C}(U)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$
$\Rightarrow (\mathscr{C}, \varrho)$ ist eine Garbe von Vektorräumen auf X
(mittels der gewöhnlichen Beschränkungsabbildungen in $\mathscr{C}(V)$).

b) $\mathscr{O}, \mathscr{M}$ sind Garben auf einer Riemannschen Fläche X.

c) Sei X eine Riemannsche Fläche, $U \subseteq X$ offen.
Sei nun $\mathscr{O}^*(U)$ die multiplikative Gruppe aller hol. Abbildungen $f : U \to \mathbb{C}^*$, so ist $\mathscr{O}^*$ eine Garbe.

Als nächstes werden sogenannte **Halme einer Prägarbe** eingeführt, welche im späteren Verlauf dieser Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen werden.
Hierfür wird ein wenig Vorarbeit benötigt:
Sei $\mathscr{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischem Raum X und $a \in X$, so definiert man eine Äquivalenzrelation auf der *disjunkten* Vereinigung

$$\dot{\bigcup_{U \ni a}} \mathscr{F}(U),$$

wobei U alle offenen Umgebungen von a durchläuft.

Definition 2.2.6. Seien $a \in X; \underset{a\in}{U, V} \subseteq X$ offene Umg. von a mit $\mathscr{F}(U) \cap \mathscr{F}(V) = \emptyset$ und $f \in \mathscr{F}(U), g \in \mathscr{F}(V)$.

i) $f \sim_a g :\Leftrightarrow \exists W \subseteq U \cap V$ offene Umgebung von a, sodass $f_{|W} = g_{|W}$
(, also $\varrho_W^U(f) = \varrho_W^V(g)$).
Bemerke: $\forall a \in X$ bildet $\sim_a$ eine Äquivalenzrelation.

ii) $\mathscr{F}_a := \lim\limits_{\substack{\to \\ U \ni a}} \mathscr{F}(U) := \left(\dot{\bigcup_{U \ni a}} \mathscr{F}(U) \right) / \sim_a$ ist der **Halm von $\mathscr{F}$ im Punkt a.**
(Gelegentlich liest man auch vom induktiven Limes.)

iii) Sei $\varrho_a : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_a, f \mapsto f/ \sim_a$ die Projektion auf die Äquivalenzklasse, so wird $\varrho_a(f)$ als **Keim von f in a** bezeichnet.

Proposition 2.2.7. *Sei $\mathscr{F}$ Garbe abelscher Gruppen auf X, $U \subseteq X$ offen, so gilt $\mathscr{F}(U) \ni f = 0 \Leftrightarrow \varrho_x(f) = 0 \ \forall x \in U$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem 1. Garbenaxiom. □

2.3 Differentialformen

Differentialformen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind schon aus der Vorlesung Analysis 3 bekannt, via kanonischer Abbildungen kann man diese auch auf den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ erweitern und schließlich eine sinnvolle Definition für *Differentialformen auf Riemannschen Flächen* formulieren. Dafür ist der folgende Abschnitt vorgesehen.

Vereinbarung 2.3.1. In diesem Unterkapitel ist, sofern nichts anderes erwähnt, mit X stets eine beliebige Riemannsche Fläche (X, Σ) gemeint.

Bemerkung & Definition 2.3.2. Sei $V \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$,
$\mathbb{C} \ni z = x+iy$, wobei x, y kanonische reelle Koordinatenfunktionen, so werden definiert:

i) Die $\mathbb{C}$-Algebra $\boldsymbol{\mathscr{E}(V)} := \{f : V \to \mathbb{C} \big| f \textit{ bel. oft nach } x \textit{ und } y \textit{ differenzierbar}\}$

ii) Die Differentialoperatoren des **Wirtinger Kalküls**

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)} \text{ und } \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

Mit Satz und Definition 1.1.2 folgt direkt: $f \in \mathscr{O}(V) \Leftrightarrow f \in ker\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

iii) Zusammenfassend erhält man also Abbildungen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathscr{E}(V) \to \mathscr{E}(V).$$

Mithilfe der Karten auf Riemannschen Flächen wird nun also zunächst der Begriff der Differenzierbarkeit auf Riemannsche Flächen übertragen.

Bemerkung & Definition 2.3.3. Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen. Im Folgenden ist mit differenzierbar stets unendlich oft gemeint.

i) Die Menge aller **auf $\boldsymbol{Y}$ differenzierbaren Funktionen** wird mit
$\boldsymbol{\mathscr{E}(Y)} := \{f : Y \to \mathbb{C} \big| \forall z : U \to V \textit{ Karte auf } X, \ U \subseteq Y : f \circ z^{-1} =: \tilde{f} \in \mathscr{E}(V)\}$
bezeichnet.
Also $f : Y \to \mathbb{C}$ **differenzierbar auf $\boldsymbol{Y}$** $:\Leftrightarrow f \in \mathscr{E}(Y)$.
Etwas anschaulicher:

$$\begin{tikzcd}
Y \supseteq U \arrow[d, "f"'] \arrow[d, "f|_U"] \arrow[dr, "z"] & \\
X \supseteq f(U) & V \arrow[l, dotted, "\tilde{f} \in \mathscr{E}(V)"'] \arrow[ul, bend right, "z^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

ii) Sei nun $(U, z), z = x + iy$ eine Koordinatenumgebung auf X.
Die Differentialoperatoren auf einer Riemannschen Fläche X lassen sich nun auf naheliegende Weise definieren:
$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \frac{\partial (f \circ z^{-1})}{\partial x}(z(a))$, wobei $f \in \mathscr{E}(U), a \in X$, analog für $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

iii) Folglich erhält man $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}(U)$, wobei das eindeutige Bild durch

$$\frac{\partial (f \circ z^{-1})}{\partial x} \circ z \in \mathscr{E}(U) \text{ definiert ist.}$$

(Analog für die anderen Abbildungen.)

iv) $\mathscr{E}$ ist mittels der gewöhnlichen Beschränkungsabbildungen eine **Garbe**, wodurch man den **Halm $\mathscr{E}_a$ aller differenzierbaren Funktionskeime** im Punkt $a \in X$ erhält.

Durch diese Definition von Differenzierbarkeit auf Riemannschen Flächen ist es uns nun möglich, den sogenannten *Cotangentialraum*, sowie das *Differential* einer differenzierbaren Funktion einzuführen.

Bemerkung & Definition 2.3.4.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X, U \subseteq X$ offene Umgebung von a.

i) $\mathfrak{M}_a := \{\varphi \in \mathscr{E}_a \big| \varphi(a) = 0\} \subset \mathscr{E}_a$ ist ein Untervektorraum.

ii) $\mathfrak{M}_a^2 \subset \mathfrak{M}_a$ beschreibt alle Funktionskeime $\varphi \in \mathfrak{M}_a$, die **zweiter Ordnung verschwinden**, d.h. φ wird durch eine Funktion f repräsentiert und es gilt bezüglich einer Koordinatenumgebung (U, z) von a

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Natürlich ist dies auch ein Untervektorraum und die Definition von $\mathfrak{M}_a^2$ ist unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinate z.
Sei hierfür z' eine andere Koordinatenumgebung und mit $J_{(-)}$ jeweils die Jacobi-Matrix gemeint, so gilt:

$$\begin{aligned} J_{f\circ z'^{-1}}(z'(a)) &= J_{f\circ z^{-1}\circ z\circ z'^{-1}}(z'(a)) \\ &= \underbrace{J_{f\circ z^{-1}}(\underbrace{z\circ z'^{-1}(z'(a))}_{=z(a)})}_{=0} \cdot J_{z\circ z'^{-1}}(z'(a)) = 0. \end{aligned}$$

iii) $T_a^{(1)} := \mathfrak{M}_a/\mathfrak{M}_a^2$ heißt **Cotangentialraum** von X im Punkt a.

iv) Sei $f \in \mathscr{E}(U)$, so ist das **Differential $d_a f \in T_a^{(1)}$ von f in a**:

$$d_a f := (f - f(a)) mod\ \mathfrak{M}_a^2$$

Satz 2.3.5. *Seien X Riemannsche Fläche und $(U, z = x+iy)$ eine Koordinatenumgebung von $a \in X$, so bilden $d_a x, d_a y$ (bzw. $d_a z, d_a \bar{z}$) eine Basis des Cotangentialraums $T_a^{(1)}$. Ist ferner f eine in einer Umgebung von a differenzierbare Funktion, so gilt:*

$$\begin{aligned} d_a f &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_a y \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z} \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis verläuft für $d_a x, d_a y$ und $d_a z, d_a \bar{z}$ analog.

1) Erzeugendensystem: Sei $\varphi \in T_a^{(1)}$ und $f \in \mathfrak{M}_a$ ein Repräsentant von φ
$\xRightarrow[entwicklung]{Taylor-} f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a)) + \Psi, \Psi \in \mathfrak{M}_a^2$
$\xRightarrow{mod\ \mathfrak{M}_a^2} f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a))$

2) <u>Basis:</u> Sei $c_1 d_a x + c_2 d_a y = 0$ in $T_a^{(1)} \Rightarrow c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) \in \mathfrak{M}_a^2$
$c_1 = \frac{\partial(c_1(x-x(a))+c_2(y-y(a)))}{\partial x}(a) = 0$, da $c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) \in \mathfrak{M}_a^2$.
Analog erhält man $c_2 = 0$.

q.e.d.

Dieser Satz und das Wissen, dass Karten holomorphe Funktionen sind, bringen uns folgende Erkenntnis:
Seien $(U, z), (U', z')$ zwei Koordinatenumgebungen von $a \in X$, so gelten

$$\overline{\frac{\partial \overline{z'}}{\partial \overline{z}}(a)} = \frac{\partial z'}{\partial z}(a) =: c \in \mathbb{C}^* \text{ und } \frac{\partial z'}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial \overline{z'}}{\partial z}(a) = 0$$

$\xRightarrow{2.3.4} d_a z' = c d_a z, d_a \overline{z'} = \overline{c} d_a \overline{z}$
Folglich sind die von $d_a z$ und $d_a \overline{z}$ aufgespannten eindimensionalen Untervektorräume des Cotangentialraums unabhängig von der Wahl der Koordinatenumgebung von a. Dies gibt Anlass zur folgenden Definition:

Definition 2.3.6. Sei (U, z) Koordinatenumgebung von $a \in X$.

i) $\boldsymbol{T_a^{(1,0)}} := \mathbb{C} d_a z$ und $\boldsymbol{T_a^{(0,1)}} := \mathbb{C} d_a \overline{z}$, insbesondere gilt also:

$$T_a^{(1)} = T_a^{(1,0)} \oplus T_a^{(0,1)}$$

Elemente aus $T_a^{(1,0)}$ heißen **Cotangentialvektoren vom Typ (1,0)** und Elemente aus $T_a^{(0,1)}$ heißen**Cotangentialvektoren vom Typ (0,1)**.

ii) Sei f differenzierbar in einer Umgebung von a, so definiert man $\boldsymbol{d'_a f, d''_a f}$ mittels

$$d_a f = d'_a f + d''_a f; d'_a f \in T_a^{(1,0)}, d''_a f \in T_a^{(0,1)},$$

wobei gilt $d'_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z, d''_a f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) d_a \overline{z}$.

Definition 2.3.7. Seien X Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen.
Eine **Differentialform 1.Ordnung auf $\boldsymbol{Y}$** ist eine Abbildung

$$\omega : Y \to \bigcup_{a \in Y} T_a^{(1)} : \omega(a) \in T_a^{(1)} \ \forall a \in Y.$$

Gilt ferner $\omega(a) \in T_a^{(1,0)} \ \forall a \in Y$, so heißt ω **vom Typ (1,0)** , bzw. **vom Typ (0,1)**, falls gilt $\omega(a) \in T_a^{(0,1)} \ \forall a \in Y$.

Beispiel 2.3.8.

a) Sei $f \in \mathscr{E}(Y)$, so sind $df, d'f, d''f$ die durch

$$(df)(a) := d_a f, (d'f)(a) := d'_a f, (d''f)(a) := d''_a f,$$

die für $a \in Y$ definiert sind, Differentialformen 1. Ordnung.

b) Sei ω Differentialform 1. Ordnung auf $Y, f : Y \to \mathbb{C}$ Funktion, so ist auch $(f\omega)(a) := f(a)\omega(a)$ eine Differentialform 1. Ordnung auf Y.

Bemerkung 2.3.9. Ist $z : U \to V$ eine komplexe Karte auf X, so lässt sich nach Satz 2.3.5 jede Differentialform 1.Ordnung auf U schreiben als

$$\omega = fdx + gdy = \varphi dz + \Psi d\bar{z}$$

wobei $f, g, \varphi, \Psi : U \to \mathbb{C}$, i.A. nicht zwangsweise stetige, Funktionen sind.

Definition 2.3.10.
Seien X Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen und ω eine Differentialform 1.Ordnung auf Y, so werden folgende Begriffe definiert:

i) ω heißt **differenzierbar**
:$\Leftrightarrow \forall z : U \to \mathbb{C}$ Karte auf X $\exists f, g \in \mathscr{E}(U \cap Y) : \boldsymbol{\omega = fdz + gd\bar{z}}$ in $U \cap Y$.

ii) ω heißt **holomorph**
:$\Leftrightarrow \forall z : U \to \mathbb{C}$ Karte auf X $\exists f \in \mathscr{O}(U \cap Y) : \boldsymbol{\omega = fdz}$ in $U \cap Y$.

iii) $\boldsymbol{\mathscr{E}^{(1)}(U)} := \{\omega : Y \to \bigcup\limits_{a \in U} T_a^{(1)} \big| \omega$ *differenzierbare Differentialform 1.Ordnung auf* $U\}$.

iv) $\boldsymbol{\mathscr{E}^{1,0}(U)} := \{\omega \in \mathscr{E}(U) \big| \omega$ *vom Typ (1,0)*$\}$, analog: $\boldsymbol{\mathscr{E}^{0,1}(U)}$.

v) $\boldsymbol{\Omega(U)} := \{\omega : Y \to \bigcup\limits_{a \in U} T_a^{(1)} \big| \omega$ *holomorphe Differentialform 1.Ordnung auf* $U\}$.

Bemerkung 2.3.11. $\mathscr{E}^{(1)}(U), \mathscr{E}^{1,0}(U), \mathscr{E}^{0,1}(U), \Omega(U)$ sind $\mathbb{C}$-Vektorräume und mittels der gewöhnlichen Beschränkungsabbildungen werden $\mathscr{E}^{(1)}, \mathscr{E}^{1,0}, \mathscr{E}^{0,1}, \Omega$ zu Garben von $\mathbb{C}$-Vektorräumen über X.

Definition 2.3.12. Sei X Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen, $a \in Y, \omega \in \Omega(Y \backslash \{a\})$. Sei ferner (U, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $U \subseteq Y$ und $z(a) = 0$, so lässt sich ω in $U \backslash \{a\}$ darstellen als $\omega = fdz$, wobei $f \in \mathscr{O}(U \backslash \{a\})$.
Sei ferner $f = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^i, c_i \in \mathbb{C}$ die Laurent-Entwicklung von f, so ist

$$\boldsymbol{Res_a(\omega) := c_{-1}}$$

das **Residuum von $\boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{a}$**.
(Bem.: Das Residuum ist unabhängig von der Wahl der Koordinatenumgebung (U, z).)

Definition 2.3.13. Sei $Y \subseteq X$ offen, $Y' \subseteq Y$ offen.

1. ω ist eine **meromorphe Differentialform** auf Y, falls
   i) $\omega \in \Omega(Y')$, also holomorphe Differentialform auf Y',
   ii) $Y \backslash Y'$ besteht nur aus isolierten Punkten,
   iii) ω hat in jedem Punkt $a \in Y \backslash Y'$ einen Pol.
2. $\boldsymbol{\mathscr{M}^{(1)}(Y)} := \{\omega$ *meromorphe Differentialform auf* $Y\}$
   Mittels der natürlichen Verknüpfung und Beschränkungsabbildung erhält man eine **Garbe** $\boldsymbol{\mathscr{M}^{(1)}}$ von Vektorräumen auf X.
   Gelegentlich liest man hier auch von abelschen Differentialen.

Ohne Beweis wird folgender zentraler Satz, welcher im späteren Verlauf der Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen wird, zitiert:

Satz 2.3.14. ***(Residuensatz)***
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $a_1, ..., a_n \in X$ paarweise verschieden, dann gilt für jede in $X' := X \backslash \{a_1, ..., a_n\}$ holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(X')$

$$\sum_{i=1}^{n} Res_{a_i}(\omega) = 0.$$

Korollar 2.3.15. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche, $f \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\}$, so besitzt f , gezählt mit Vielfachheit, ebensoviele Null- wie Polstellen.*

Beweis. Sei $\omega := \frac{df}{f}$, so ist diese Differentialform holomorph außerhalb der Null- und Polstellen von f.
Sei nun $a \in X$ eine Null- bzw. Polstelle m-ter Ordnung von f, so gilt $Res_a(\omega) = m$ bzw. $Res_a(\omega) = -m$.
Folglich liefert der Residuensatz die Behauptung.

q.e.d.

2.4 Cohomologiegruppen

Ziel dieses Paragraphen ist die Definition der Cohomologiegruppen $H^1(X, \mathscr{F})$ für Garben $\mathscr{F}$ abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X.
Ist nichts anderes erwähnt, so ist für die kommenden 2 Unterkapitel X also ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X.

Definition 2.4.1. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X.
Die ***q*-te Cokettengruppe** von $\mathscr{F}$ bzgl. $\mathfrak{U}$ ist

$$\boldsymbol{C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})} := \prod_{(i_0,...,i_q) \in I^{q+1}} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_q}).$$

Die Elemente von $C^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ sind also Familien

$$(f_{i_0,...,i_q})_{(i_0,...,i_q) \in I^{q+1}}, \text{ wobei } f_{i_0,...,i_q} \in \mathscr{F}(U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_q}),$$

welche man als ***q*-Coketten** bezeichnet.
Mittels komponentenweiser Addition erhält man mittels der sogenannten **Ableitungsoperatoren**

$$\delta_0 : C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), (f_i)_{i \in I} \mapsto (g_{i,j})_{(i,j) \in I^2}, g_{i,j} := f_j - f_i \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$$
$$\delta_1 : C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^2(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), (f_{i,j})_{(i,j) \in I^2} \mapsto (g_{i,j,k})_{(i,j,k) \in I^3}, g_{ijk} := f_{j,k} - f_{i,k} + f_{i,j} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

Gruppenhomomorphismen.
Hierbei sind die Elemente rechts vom Gleichheitszeichen natürlich auf die *gemeinsamen Definitionsbereiche* zu beschränken. Besonders hervorzuheben sind dabei folgende Untergruppen:

i) Die Gruppe der **1-Cozyklen $\boldsymbol{Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})}$** $:= Ker(C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_1} C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F}))$

ii) Die Gruppe der **1-Coränder $\boldsymbol{B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})}$** $:= Im(C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}))$

Die Faktorgruppe

$$\boldsymbol{H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})} := Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})/B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$
mit Elementen $[\boldsymbol{(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}}]$, wobei $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$,

wird als **1.Cohomologiegruppe** mit Koeffizienten in $\mathscr{F}$ bzgl. der Überdeckung $\mathfrak{U}$ bezeichnet. Die Elemente dieser Gruppe heißen **Cohomologieklassen**. Man stellt fest, dass zwei Elemente genau dann in der selben Cohomologieklasse liegen, wenn ihre Differenz ein Corand ist., d.h.

$$[(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}] = [(\tilde{f}_{i,j})_{(i,j)\in I^2}] \Leftrightarrow \underbrace{(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} - (\tilde{f}_{i,j})_{(i,j)\in I^2}}_{=(f_{i,j}-\tilde{f}_{i,j})_{(i,j)\in I^2}} \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$$

Bemerkung & Definition 2.4.2.

1. Da $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$ gilt, ist jeder Corand ein Cozyklus, d.h. $B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \subseteq Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ [, deshalb ist die Quotientenbildung, welche für $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ erst möglich.]

2. Eine 1-Cokette $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ ist ein Cozyklus (, liegt also in $Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$) $\Leftrightarrow f_{i,k} = f_{i,j} + f_{j,k}$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ für alle $i,j,k \in I$ (**Cozyklenrelation**).

3. $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \Rightarrow \begin{cases} f_{i,i} = 0 \\ f_{i,j} = -f_{j,i} \end{cases} \quad \forall i,j \in I,$
   dies erhält man, indem man 2. i=j=k bzw. i=k setzt.

4. $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in B^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$
   $\Leftrightarrow \exists (g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) : f_{i,j} = g_j - g_i$ auf $U_i \cap U_j \; \forall i,j \in I$
   , also $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} = \delta_0\left((g_i)_{i\in I}\right)$.
   Deshalb werden die Coränder oft auch als **zerfallende Cozyklen** bezeichnet.

Die definierten Cohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ hängen noch von der gewählten Überdeckung des topologischen Raumes X ab. Im Folgenden werden Grundlagen dafür geschaffen, eine Cohomologiegruppe zu definieren, die nur von X und $\mathscr{F}$ abhängt. Hierfür geht man zu immer feineren Überdeckungen von X über und bildet anschließend den induktiven Limes.

Definition 2.4.3. Seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}, \mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ offene Überdeckungen von X.

$$\mathfrak{V} \text{ heißt } \textbf{feiner} \text{ als } \mathfrak{U} :\Leftrightarrow \forall V_k \in \mathfrak{V}\; \exists U_i \in \mathfrak{U} : V_k \subseteq U_i.$$

Notation: $\boldsymbol{\mathfrak{V} < \mathfrak{U}}$.

Bemerkung & Definition 2.4.4.
Seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}, \mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ offene Überdeckungen von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$

$$\Rightarrow \exists \tau : K \to I : V_k \subseteq U_{\tau(k)} \ \forall k \in K.$$

Definiere nun

$$_{Z^1}t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}), (f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \mapsto (g_{k,l})_{(k,l)\in K^2}, g_{k,l} := f_{\tau(k),\tau(l)}\big|_{V_k\cap V_l}$$

Man stellt fest, dass diese Abbildung Coränder in Coränder überführt, was folglich einen induzierten Homomorphismus über den Cohomologiegruppen liefert:

$$\boldsymbol{t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$$

Satz 2.4.5. *Die Abbildung $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ ist*

i) unabhängig von der Wahl der Verfeinerung $\tau : K \to I$ und

ii) injektiv.

Beweis.

i) Sei $\tilde{\tau} : K \to I$ eine weitere solche Abbildung und ferner

$$g_{k,l} := f_{\tau(k),\tau(l)}\big|_{V_k\cap V_l} \text{ und } \tilde{g}_{k,l} := f_{\tilde{\tau}(k),\tilde{\tau}(l)}\big|_{V_k\cap V_l}$$

So bleibt zu zeigen: $\big[(g_{i,j})_{(i,j)\in I^2}\big] = \big[(\tilde{g}_{i,j})_{(i,j)\in I^2}\big]$.
Bemerke zunächst: Da laut Voraussetzung $V_k \subseteq U_{\tau(k)}$ und $V_k \subseteq U_{\tilde{\tau}(k)}$, also $V_k \subseteq U_{\tau(k)} \cap U_{\tilde{\tau}(k)}$, ist folgender Ausdruck definiert:

$$h_k := f_{\tau(k),\tilde{\tau}(k)}\big|_{V_k} \in \mathscr{F}(V_k)$$

Daraus folgt also direkt, dass auf $V_k \cap V_l$ folgende Gleichheit gilt:

$$\begin{aligned} g_{k,l} - \tilde{g}_{k,l} &= f_{\tau(k),\tau(l)} - f_{\tilde{\tau}(k),\tilde{\tau}(l)} = f_{\tau(k),\tau(l)} + f_{\tau(l),\tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l),\tilde{\tau}(k)} - f_{\tilde{\tau}(k),\tilde{\tau}(l)} \\ &\xlongequal{(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}\in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})} f_{\tau(k),\tilde{\tau}(k)} - f_{\tau(l),\tilde{\tau}(l)} = h_k - h_l \end{aligned}$$

$\Rightarrow (g_{k,l})_{(k,l)\in I^2} - (\tilde{g}_{k,l})_{(k,l)\in I^2} \in B^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$✓

ii) Man zeige hierfür $Ker(t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}) = B^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, d.h. falls $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}([(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2})]) = 0$, also

$$_{Z^1}t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}((f_{i,j})_{(i,j)\in I^2})) \text{ in } Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \text{ zerfällt,}$$

so zerfällt also auch $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.
Angenommen das Bild von $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ zerfällt.
$\Rightarrow \exists (g_k)_{k\in K} \in C^0(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) : f_{\tau(k),\tau(l)} = g_l - g_k$ auf $V_k \cap V_l \ \forall k, l \in K$
Ferner gilt für $i \in I, k, l \in K$ auf $U_i \cap V_k \cap V_l$:

$$\begin{aligned} g_l - g_k = f_{\tau(k),\tau(l)} &\xlongequal{f\in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})} f_{\tau(k),i} + f_{i,\tau(l)} \xlongequal{f\in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{F})} f_{\tau(k),i} - f_{\tau(l),i} \\ &\Leftrightarrow f_{\tau(k),i} + g_k = f_{\tau(l),i} + g_l. \end{aligned}$$

Das 2. Garbenaxiom, angewandt auf eine Familie offener Mengen $(U_i \cap V_k)_{k\in K}$, liefert die Existenz eines $h_i \in \mathscr{F}(U_i)$, sodass

$$h_i\big|_{U_i \cap V_k} = f_{\tau(k),i} + g_k \ \forall k \in K.$$

Folglich gilt für alle $k \in K$ auf $U_i \cap U_j \cap V_k, i, j \in I$

$$f_{i,j} = f_{i,\tau(k)} + f_{\tau(k),j} = f_{\tau(k),j} + g_k - f_{\tau(k),i} - g_k = h_j - h_i.$$

Da dies für alle $k \in K$ gilt, folgt mit dem 1. Garbenaxiom die Gültigkeit (global) auf $U_i \cap U_j$, d.h. $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ zerfällt auf $\mathfrak{U}$.

q.e.d.

Dieser Satz kann nun belegen, dass die folgende Definition einer Äquivalenzrelation auf der *disjunkten Vereinigung*

$$\dot{\bigcup_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}),$$

wo $\mathfrak{U}$ alle offenen Überdeckungen von X durchläuft wohldefiniert ist bzw. ein eindeutiges Ergebnis liefert.

Bemerkung & Definition 2.4.6. Sei X topologischer Raum.

i) Seien $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}, \mathfrak{U}$ offene Überdeckungen von X mit $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, so gilt

$$t^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}} \circ t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}.$$

ii) Seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ offene Überdeckungen von $X; \xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), \eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathscr{F})$.

$\xi \sim \eta :\Leftrightarrow \exists \mathfrak{V}$ offene Überdeckung von X mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}, \mathfrak{V} < \mathfrak{U}' : t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) = t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta)$.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation.

iii) Die **1.Cohomologiegruppe von X** ist

$$\boldsymbol{H^1(X, \mathscr{F})} := \lim_{\overrightarrow{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U}, X) = \left(\dot{\bigcup_{\mathfrak{U}}} H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \right) / \sim$$

mit Elementen $[(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}]_\sim$, wobei $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$.

Mit folgender **repräsentantenweise** definierter **Addition** wird $H^1(X, \mathscr{F})$ zu einer abelschen Gruppe:
Seien $x, y \in H^1(X, \mathscr{F})$ mit Repräsentanten $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ und $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathscr{F})$.
Man wähle nun eine **beliebige** Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ (z.B. $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}'$).

$$\text{Folglich ist } H^1(X, \mathscr{F}) \ni x + y := \overbrace{\left[t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) + t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta) \right]_\sim}^{\in H^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})}$$

iv) Betrachtet man statt einer Garbe abelscher Gruppen, eine Garbe von Vektorräumen oder sonstigem, so ergeben sich analoge Aussagen, sprich $H^1(X, \mathscr{F})$ ist Vektorraum, etc..

v) Nach Satz 2.4.5 ii) gilt:

$$H^1(X, \mathscr{F}) = 0 \Leftrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0 \ \forall \mathfrak{U} \text{ offene Überdeckung von } X.$$

Folgende zwei Sätze werden ohne Beweise aufgeführt, da diese im Bezug auf das Thema keine tieferen Erkenntnisse bringen und an der Stelle zu viel Platz einnehmen würden.

Satz 2.4.7. *Sei X Riemannsche Fläche.*

i) *Es ist $H^1(X, \mathscr{E}) = 0$, wobei $\mathscr{E}$ hier die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf X ist.*

ii) *Sei X außerdem einfach zusammenhängend, so gilt*

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{Z}) = 0,$$

wobei $\mathbb{C}, \mathbb{Z}$ die Garbe der lokalkonstanten Funktionen mit Werten in den komplexen bzw. ganzen Zahlen bezeichnet. (Das dies mittels der natürlichen Beschränkungsabbildungen tatsächlich eine Garbe ist, bleibt dem Leser als Übung überlassen.)

Satz 2.4.8. *(von Leray)*
Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit $H^1(U_i, \mathscr{F}) = 0$ $\forall i \in I$, so gilt

$$H^1(X, \mathscr{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

Ein solches $\mathfrak{U}$ nennt man ***Leraysche Überdeckung*** *(1.Ordnung) bezüglich $\mathscr{F}$.*

An dieser Stelle wird bemerkt, dass mit "passend" konstruierten Abbildungen $\delta_i : C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}), i \geq 0$ entsprechende *(i+1)-te Cohomologiegruppen* bezüglich X definiert werden können. Folgende Definition dient dazu, eine *0.Cohomologiegruppe* zu definieren:

Bemerkung & Definition 2.4.9. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X.

1. $\boldsymbol{Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})} := Ker\left(C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\right)$ Gruppe der **0-Cozyklen**
   $\boldsymbol{B^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})} := 0$ Gruppe der **0-Coränder**
   $\boldsymbol{H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})} := Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})/B^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ **0.Cohomologiegr. bez. $\mathfrak{U}$**

2. $$\begin{aligned} (f_i)_{i \in I} \in Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) &\Leftrightarrow f_j\big|_{U_i \cap U_j} - f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_{i,j} = 0 \quad && \forall i, j \in I \\ &\Leftrightarrow f_j\big|_{U_i \cap U_j} = f_i\big|_{U_i \cap U_j} && \forall i, j \in I \end{aligned}$$

   Laut dem 2.Garbenaxiom existiert also ein eindeutiges $f \in \mathscr{F}(X)$, sodass $f\big|_{U_i} = f_i$ $\forall i \in I$, wodurch sich folgende Isomorphie ergibt:

   $$H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{F}(X), (f_i)_{i \in I} \mapsto f$$

Die Gruppen $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ hängen also nicht von der Überdeckung $\mathfrak{U}$ ab, was folgende Definition motiviert:

Definition 2.4.10. Die **0.Cohomologiegruppe von $\boldsymbol{X}$** ist

$$\boldsymbol{H^0(X, \mathscr{F})} := \mathscr{F}(X).$$

2.5 Die exakte Cohomologiesequenz

Dies soll nun als letzte Vorbereitung für den eigentlichen Kern dieser Arbeit dienen, dem Satz von Riemann-Roch. Im Folgenden wird der Begriff der Garben-Homomorphismen, exakten Sequenzen solcher Homomorphismen, sowie die daraus entspringenden exakten Cohomologiesequenzen eingeführt und näher betrachtet.

Definition 2.5.1. Seien $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ Garben abelscher Gruppen über X.
Ein **Garben-Homomorphismus** $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ist eine Familie von Gruppen-Homom.

$$\{\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\}_{U \subseteq X \ offen},$$

welche mit den Beschränkungsabbildungen der jeweiligen Garben verträglich sind, sprich für jedes Paar offener Mengen $U \subseteq V \subseteq X$ kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\varrho_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

$\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ heißt **Isomorphismus**, falls alle $\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ Isomorphismen sind. Auch diese Definition lässt sich analog auf Vektorräume etc. übertragen.

Vereinbarung 2.5.2. Im Folgenden wird zur besseren Übersicht gelegentlich $\alpha : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ statt $\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ geschrieben.

Beispiel 2.5.3.

a) Seien $\mathscr{E}, \mathscr{E}^{(1)}$ die Garben der differenzierbaren Funktionen bzw. Differentialformen 1. Ordnung auf einer Riemannschen Fläche X. Die Ableitung d [s. Bsp. 2.3.8a)] von Funktionen liefert einen Garben-Homomorphismus

$$d : \mathscr{E} \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(1)}.$$

Dies gilt auch für die Ableitungsoperatoren d', d''.

b) Sei X eine Riemannsche Fläche, so sind die natürlichen Inklusionen

$$\mathscr{O} \hookrightarrow \mathscr{E}, \mathbb{C} \hookrightarrow \mathscr{E}, \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathscr{E}, \Omega \hookrightarrow \mathscr{E}^{1,0}$$

usw. Garben-Homomorphismen.

c) Sei X eine Riemannsche Fläche, so ist

$$exp : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*, \mathscr{O}(U) \ni f \mapsto exp(2\pi i f) \in \mathscr{O}(U)$$

ein Garben-Homomorphismus.

Definition 2.5.4. Jeder Garben-Homomorphismus $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ auf einem topologischen Raum X induziert für jedes $x \in X$ Homomorphismen der Halme:

$$\alpha_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

i) Eine **Sequegnz von Garben-Homomorphismen** $\mathscr{F} \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha}} \mathscr{G} \xrightarrow{\boldsymbol{\beta}} \mathscr{H}$ heißt **exakt** $:\Leftrightarrow$ induzierte Halmsequenz $\mathscr{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathscr{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathscr{H}_x$ ist exakt $\forall x \in X$ $:\Leftrightarrow Ker(\beta_x) = Im(\alpha_x)\ \forall x \in X$.

ii) Eine **(lange) Sequenz von Garben- Homomorphismen** $\boldsymbol{\mathscr{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathscr{F}_n}$ heißt **exakt** $:\Leftrightarrow \mathscr{F}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathscr{F}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathscr{F}_{k+2}$ exakt für $1 \leq k \leq n-2$.

Lemma 2.5.5. *Sei* $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H}$ *eine exakte Garbensequenz auf* X*, so ist*

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathscr{H}(U) \text{ exakt für alle } U \subseteq X \text{ offen.}$$

Beweis. Prüfe zunächst die Exaktheit von $0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathscr{G}(U)$, hierfür wird gezeigt, dass α_U injektiv ist:
Sei $f \in \mathscr{F}(U)$ mit $\alpha_U(f) = 0$
$\xRightarrow[\forall x \in X]{\alpha_x \text{ inj.}} \forall x \in U\ \exists V_k \subseteq U$ offene Umgebung von X so, dass $f_{|V_k} = 0$
$\xRightarrow[U = \bigcup_{x \in U} V_x]{1.GA} f = 0$✓

Zu zeigen bleibt also: $\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathscr{H}(U)$ ist exakt, d.h. $Im(\alpha_U) = Ker(\beta_U)$.
"$\subseteq$" : Sei $f \in \mathscr{F}(U), g := \alpha_U(f)$, da $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ exakt $\forall x \in X$ ist, folgt
$\forall x \in U\ \exists V_x \subseteq U$ offene Umgebung von $x : \beta_U(g)_{|V_x} = 0 \xRightarrow{1.GA} \beta_U(g) = 0$✓
"$\supseteq$" : Sei $g \in \mathscr{G}(U) : \beta_U(g) = 0$. Da $\forall x \in U : Ker(\beta_x) = Im(\alpha_x)$ nach Voraussetzung
$\Rightarrow \exists (V_x)_{x \in U}$ offene Überd. von U und $f_x \in \mathscr{F}(V_x)$ so, dass $\alpha_{V_x}(f_x) = g_{|V_x} \forall x \in U$.

$$\Rightarrow \alpha_{V_x \cap V_y}\left(f_{x|V_x \cap V_y} - f_{y|V_x \cap V_y}\right) = \overbrace{\alpha_{V_x \cap V_y}\left(f_{x|V_x \cap V_y}\right) - \alpha_{V_x \cap V_y}\left(f_{y|V_x \cap V_y}\right)}^{=\alpha_{V_x}(f_x)_{|V_x \cap V_y} - \alpha_{V_y}(f_y)_{|V_x \cap V_y}}$$

$$= g_{|V_x|V_x \cap V_y} - g_{|V_y|V_x \cap V_y} = 0$$

$\xRightarrow{\alpha_{V_x \cap V_y} \text{ inj.}} f_{x|V_x \cap V_y} = f_{y|V_x \cap V_y}\ \forall x, y \in U \xRightarrow{2.GA} \exists f \in \mathscr{F}(U) : f_{|V_x} = f_x\ \forall x \in U$
Da laut Definition von Homomorphismen gilt

$$\alpha_U(f)_{|V_x} = \alpha_{V_x}\left(f_{|V_x}\right) = g_{|V_x}$$

$\xRightarrow{1.GA} \alpha_U(f) = g.$

q.e.d.

Bemerkung & Definition 2.5.6. Ein Garben-Homomorphismus $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ auf einem topologischen Raum X induziert Homomorphismen über den Cohomologiegruppen:

$$a^0 : H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{G})$$
$$a^1 : H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G})$$

Hierbei ist der Homomorphismus α^0 lediglich die Abbildung $\alpha_X : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$.
Etwas weiter ausholen muss man für den Homomorphismus α^1:
Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Die Abbildung

$$\alpha_{\mathfrak{U}} : C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$$

ordnet einer Cokette $\xi = (f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ eine Cokette

$$\alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) := (\alpha(f_{i,j}))_{(i,j)\in I^2} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$$

zu. Dabei werden, wie man leicht nachrechnet, Cozyklen auf Cozyklen und Coränder auf Coränder abgebildet. Man erhält also einen induzierten Homomorphismus

$$\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}).$$

Die Kollektion der $\overline{\alpha}_{\mathfrak{U}}$, wobei $\mathfrak{U}$ alle offenen Überdeckung von X durchläuft, induziert einen Homomorphismus α^1 [s. 2.4.6 ii), induktiver Limes].

Konstruktion 2.5.7. Gegeben sei folgende exakte Garbensequenz auf X:

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

Man definiert einen **verbindenden Homomorphismus**

$$\boldsymbol{\delta^*} : H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F})$$

auf folgende Weise:
Sei $h \in H^0(X, \mathscr{H}) = \mathscr{H}(X)$
Da alle Homomorphismen $\beta_x : \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ surjektiv sind, gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von X und eine Cokette $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$, s.d.

$$\beta(g_i) = h\big|_{U_i} \ \forall i \in I.$$

Nun gilt

$$\beta(g_j - g_i) = \beta(g_j) - \beta(g_i) = h_{|U_j} - h_{|U_i} = 0 \text{ über } U_i \cap U_j.$$

Da nach 2.5.4 die auf $U_i \cap U_j$ induzierte Sequenz exakt ist, gibt es ein $f_{i,j} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$, sodass

$$\alpha_{U_i \cap U_j}(f_{i,j}) = g_j - g_i.$$

Mit dem selben Satz, sprich der Tatsache dass
$\alpha_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ injektiv ist und $\alpha_{U_i \cap U_j \cap U_k}(f_{i,j} + f_{j,k} - f_{i,k}) = 0$, gilt also

$$f_{i,j} + f_{j,k} = f_{i,k} \Leftrightarrow (f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

FOlglich wird $H^1(X, \mathscr{F}) \ni \delta^*(h) := \left[(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}\right]_\sim$ gesetzt.
Natürlich ist das gefundene Element $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ streng genommen nicht eindeutig, im Bezug auf die Cohomologieklasse jedoch schon!

Mithilfe dieser Konstruktion kann man nun folgenden Satz formulieren:

Satz 2.5.8. *Sei $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ exakte Garbensequenz auf X, so gilt:*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathscr{F}) &\xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathscr{H}) \\ &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathscr{H}) \text{ ist exakt.} \end{aligned}$$

Beweis. Nach 2.5.4 genügt es, ab der Stelle $H^0(X, \mathscr{H})$ Exaktheit zu überprüfen:

1. "$\underline{Im(\beta^0) = Ker(\delta^*)}$" :
   " $\subseteq$ " : Sei $g \in H^0(X, \mathscr{G}), h := \beta^0(g)$
   Wähle nun für die oben genannte Konstruktion $g_i := g_{|U_i}$.
   $\Rightarrow f_{i,j} = \alpha^{-1}(g_j - g_i) = 0$ auf $U_i \cap U_j \Rightarrow \delta^*(h) = \left[(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2}\right] = 0.$✓

   " $\supseteq$ " : Sei $h \in Ker(\delta^*), (f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ein Repräsentant von $\delta^*(h)$
   $\xRightarrow{\delta^*(h)=0} (f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in B^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \Rightarrow \exists (f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) : f_{i,j} = f_j - f_i.$
   Setze nun $\tilde{g}_i := g_i - \alpha(f_i)$, wobei $(g_i)_{i\in I}$ so gewählt wurde, wie in Konstruktion 2.5.7, sprich $\alpha(f_{i,j}) = g_j - g_i$.
   Es gilt

   $$\tilde{g}_j - \tilde{g}_i = g_j - g_i - (\overbrace{\alpha(f_j) - \alpha(f_i)}^{\alpha(f_j - f_i)}) = \alpha(f_{i,j}) - \alpha(f_{i,j}) = 0.$$

   Also $\tilde{g}_j = \tilde{g}_i$ über $U_i \cap U_j$ $\forall i, j \in I \xRightarrow{2.GA} \exists g \in \mathscr{G}(X) = H^0(X, \mathscr{G})$, sodass:
   $\beta_X(g)_{|U_i} = \beta_{U_i}(g_{|U_i}) = \beta_{U_i}(\tilde{g}_i) = \beta_{U_i}(g_i - \alpha_{U_i}(f_i)) = \beta_{U_i}(g_i) \xlongequal{2.5.7} h_{|U_i}$ $\forall i \in I$
   $\xRightarrow{1.GA} \beta_X(g) = h \Rightarrow h \in Im(\beta^0).$✓

2. $\underline{Im(\delta^*) = Ker(\alpha^1)}$:
"$\subseteq$" Folgt direkt aus der Tatsache, dass das Bild von f unter α laut Konstruktion zerfallend ist.

"$\supseteq$" : Sei $\xi \in Ker(\alpha^1)$ und $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ein Repräsentant.
$\xRightarrow{\alpha^1(\xi)=0} \exists (g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) : \alpha(f_{i,j}) = g_j - g_i$ auf $U_i \cap U_j$
$\Rightarrow 0 = \beta(\alpha(f_{i,j})) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ auf $U_i \cap U_j \Leftrightarrow \beta(g_i) = \beta(g_j)$ auf $U_i \cap U_j$
$\xRightarrow{2.GA} \exists h \in \mathscr{H}(X) = H^0(X, \mathscr{H}) : h_{|U_i} = \beta_{U_i}(g_i)\ \forall i \in I$
$\xRightarrow{2.5.7} \delta^*(h) = \xi.$✓

3. $\underline{Im(\alpha^1) = Ker(\beta^1)}$:
"$\subseteq$" : $\mathscr{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha_{U_i\cap U_j}} \mathscr{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\beta_{U_i\cap U_j}} \mathscr{H}(U_i \cap U_j)$ ist exakt,
also gilt $\beta_{U_i\cap U_j} \circ \alpha_{U_i\cap U_j} = 0.$✓

"$\supseteq$" : Sei $\eta \in Ker(\beta^1), (g_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$.
$\xRightarrow{\beta^1(\eta)=0} \exists (h_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) : \beta(g_{i,j}) = h_j - h_i$ auf $U_i \cap U_j$.
Wähle nun für alle $x \in X$ ein $\tau(x)$ so, dass $x \in U_{\tau(x)}$.
Da $\beta_x : \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x$ surjektiv ist, existiert $V_x \subseteq U_{\tau(x)}$ offene Umgebung von x und $g_x \in \mathscr{G}_x$, sodass $\beta_{V_x}(g_x) = h_{\tau(x)}{}_{|V_x}$.
Seien nun also

$$\mathfrak{V} = (V_x)_{x\in X} \text{ und } \tilde{g}_{x,y} = g_{\tau(x),\tau(y)}{}_{|V_x\cap V_y}$$

$\Rightarrow (\tilde{g}_{x,y})_{(x,y)\in X^2} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{G})$ ist ebenfalls ein Repräsentant von η
(, man ist hier lediglich zu einer feineren Überdeckung übergegangen).
Sei nun $\Psi_{x,y} := \tilde{g}_{x,y} + g_y - g_x$
$\Rightarrow \Psi_{x,y} - \tilde{g}_{x,y} = g_y - g_x$, also sind $\Psi_{x,y}, \tilde{g}_{x,y}$ cohomolog und somit $\Psi \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{G})$.

$$\Rightarrow \beta_{V_x\cap V_y}(\Psi_{x,y}) = \beta_{V_x\cap V_y}(\underbrace{\tilde{g}_{x,y}}_{\textit{Repräsentant von } \eta}) = 0$$

$\xRightarrow[=Im(\alpha_{V_x\cap V_y})]{Ker(\beta_{V_x\cap V_y})} \exists f_{x,y} \in \mathscr{F}(V_x \cap V_y) : \alpha(f_{x,y}) = \Psi_{x,y}$
$\xRightarrow{\alpha_{V_x\cap V_y}\ inj.} \alpha^{-1}(\underbrace{\Psi_{x,y}}_{\in Z^1(\mathfrak{V},\mathscr{G})}) = (f_{x,y})_{(x,y)\in X^2} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$.
Sei nun $\xi := \left[(f_{x,y})_{(x,y)\in X^2}\right]_\sim$, so gilt $\alpha^1(\xi) = \eta$.

q.e.d.

Korollar 2.5.9.
Sei $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ *exakte Garbensequenz auf* X, $H^1(X, \mathscr{G}) = 0$

$$\Longrightarrow H^1(X, \mathscr{F}) \cong H(X)/\beta(\mathscr{G}(X)).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 2.5.8 und dem 1.Isomorphiesatz. □

3 Der Satz

3.1 Einige Definitionen und Sätze

Definition 3.1.1. Das **Geschlecht** einer kompakten Riemannschen Fläche X ist

$$\boldsymbol{g := dim(H^1(X, \mathscr{O}))}.$$

Bemerkung 3.1.2.

i) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, so gilt $dim(H^1(X, \mathscr{O})) < \infty$.

ii) Sei χ die Eulercharakteristik und g das Geschlecht von X, so gilt

$$\chi = 2 - 2g.$$

Folglich ist das Geschlecht eine topologische Invariante.
(Diese Formel gilt nur für orientierbare Flächen, im Rahmen dieser Arbeit ist dies jedoch ausreichend.)

iii) Folgende Euler Charakteristiken von kompakten (Riemannschen) Flächen sollten aus der Topologie bekannt sein:

a) Sei T ein komplexer Torus, so gilt $\chi(T) = 0 \Rightarrow g = 1$

b) Die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$:
$\chi(\mathbb{P}_1) \overset{X \cong S^2}{=\!=\!=} \chi(S^2) = 2 \Rightarrow g = 0$

Definition 3.1.3. Sei X Riemannsche Fläche. Ein **Divisor** auf X ist eine Abbildung

$$D : X \to \mathbb{Z},$$

so, dass falls $K \subseteq X$ kompakt ist, gilt

$$\#\{x \in K \big| D(x) \neq 0\} < \infty.$$

Mittels punktweiser Addition bilden die Divisoren auf X eine abelsche Gruppe, welche man als $\boldsymbol{Div(X)}$ bezeichnet, sprich seien $D, D' \in Div(X)$, so ist

$$D + D' : X \to \mathbb{Z}, x \mapsto D(x) + D'(x).$$

Seien $D, D' \in Div(X)$, so schreibt man

$$\boldsymbol{D \leq D'} :\Leftrightarrow D(x) \leq D'(x) \ \forall x \in X.$$

Beispiel 3.1.4. Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen.

a) Sei $f \in \mathscr{M}(Y), a \in Y$, so ist die **Ordnung von f in a**

$$\boldsymbol{ord_a(f)} := \begin{cases} 0, \text{ falls } f \text{ in } a \text{ holomorph und ungleich } 0 \text{ ist.} \\ k, \text{ falls } a \text{ ist Nullstelle } k\text{-facher Ordnung von } f \text{ ist.} \\ -k, \text{ falls } a \text{ ist Polstelle } k\text{-facher Ordnung von } f \text{ ist.} \\ \infty, \text{ falls: } \exists U \subseteq Y \text{ Umgebung von } a : f(x) = 0 \ \forall x \in U. \end{cases}$$

Folgende Abbildung bildet nun einen Divisor für alle $f \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\}$:

$$(\boldsymbol{f}) : X \to \mathbb{Z}, x \mapsto ord_x(f)$$

Man nennt die Funktion $\boldsymbol{f}$ **ein Vielfaches eines Divisors** $\boldsymbol{D}$ $:\Leftrightarrow (f) \geq D$.

Bemerke hier, dass auf kompakten Riemannschen Flächen meromorphe Funktionen $f \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\}$ nur endliche viele Pol- bzw. Nullstellen besitzenaufgrund der Tatsache, dass sowohl Pol- als auch Nullstellen isolierte Punkte sind. Dies wurde bereits implizit im Beweis von Korollar 2.3.15 genutzt.

b) Analog definiert man einen Divisor für meromorphe Differentialformen:
Sei $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(Y), a \in Y, (U, z)$ Koordinaten- Umgebung von a.

$$\xRightarrow{Def.2.3.10ii)} \exists f \in \mathscr{M}(U \cap Y) : \omega = f dz$$

Dies ermöglicht nun folgende Definition eines Divisors für $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)\backslash\{0\}$:

$$(\boldsymbol{\omega}) : X \to \mathbb{Z}, x \mapsto ord_x(\omega) := ord_x(f)$$

Dieser Divisor wird auch **kanonischer Divisor** genannt und auf analoge Weise heißt auch eine meromorphe Differentialform

$$\boldsymbol{\omega} \textbf{ ein Vielfaches eines Divisors } \boldsymbol{D} :\Leftrightarrow (\omega) \geq D.$$

c) Seien $f, g \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\}, \omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)\backslash\{0\}$, so gelten
   i) $(fg) = (f) + (g)$
   ii) $(f\omega) = (f) + (\omega)$, beachte $f\omega$ ist wieder eine Differentialform 1.Ordnung
   iii) $\left(\frac{1}{f}\right) = -(f)$, Nullstellen von f werden zu Polstellen von $\frac{1}{f}$ und umgekehrt.

Definition 3.1.5. Sei X eine Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$.

1. D heißt **Hauptdivisor** $:\Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\} : D = (f)$
2. Sei $D' \in Div(X)$ ein weiterer Divisor, so heißen D, D' (linear) **äquivalent** $:\Leftrightarrow D - D'$ ist Hauptdivisor.
3. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{M}^{(1)}(X)\backslash\{0\}$, so heißen diese beiden **äquivalent** $:\Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{M}(X)\backslash\{0\} : \omega_1 = f\omega_2 \Leftrightarrow (\omega_1) - (\omega_2) = (f)$, also Hauptdivisor.

Beispiel 3.1.6.

a) Die beiden Divisoren

$$D := \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}, D' := \begin{cases} 1, x = \infty \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \in Div(\mathbb{P}^1)$$

sind äquivalent, denn es gilt $D - D' = (z)$.

b) Allgemeiner: Seien $a, b \in \mathbb{P}_1$, so sind die beiden Divisoren

$$D := \begin{cases} 1, x = a \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}, D' := \begin{cases} 1, x = b \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \in Div(\mathbb{P}^1)$$

äquivalent, denn es gilt $D - D' = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)$.

c) <u>Warnung</u>: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $X \overset{bih.}{\not\approx} \mathbb{P}_1$, so sind die beiden Divisoren aus b) mit $a, b \in X$ **nicht** äquivalent.
(Hierfür benötigt man ein wenig grundlegende Überlagerungstheorie.)

Proposition & Definition 3.1.7. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, so bildet die sogenannte **Gradabbildung** einen Gruppenhomomorphismus:*

$$\boldsymbol{deg} : Div(X) \to \mathbb{Z}, D \mapsto \sum_{x \in X} D(x) \ (< \infty)$$

Bemerkung 3.1.8.
Sei X eine kpt. Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$ Hauptdivisor, so gilt mit 2.3.15:

$$\exists f \in \mathscr{M}(X) \backslash \{0\} : D = (f) \Rightarrow deg(D) = deg((f)) = 0.$$

$$\Longrightarrow \text{Sind } D, D' \in Div(X) \text{ äquivalent, so gilt } deg(D - D') = 0.$$

Aufgrund dieser Tatsache wird oftmals bei der Diskussion über kanonische Divisoren von meromorphen Differentialform $\omega \in \mathscr{M}(X) \backslash \{0\}$ die Differentialform verschwiegen und man ließt von **dem kanonischen Divisor $\boldsymbol{K_X}$**, welcher bis auf lineare Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Proposition & Definition 3.1.9.
Sei X eine Riemannsche Fläche, $D \in Div(X), U \subseteq X$ offen, so definiert man

$$\boldsymbol{\mathscr{O}_D(U)} := \{f \in \mathscr{M}(U) | \underbrace{ord_x(f) \geq -D(x)}_{=(f) \geq -D} \ \forall x \in U\} \subseteq \mathscr{M}(U).$$

*Mit den natürlichen Beschränkungsabbildungen bildet $\mathscr{O}_{\boldsymbol{D}}$ eine **Garbe**.*

Proposition 3.1.10. *Seien X Riemannsche Fläche, $D, D' \in Div(X)$ äquivalent*

$$\Rightarrow \mathscr{O}_D \cong \mathscr{O}_{D'}$$

Beweis. Seien D, D' also äquivalent
$\Rightarrow \exists \varphi \in \mathscr{M}(X) \backslash \{0\} : D - D' = (\varphi)$
Nun liefert der induzierte Garbenhomomorphismus

$$\varphi\cdot : \mathscr{O}_D \to \mathscr{O}_{D'}, f \mapsto \varphi \cdot f$$

einen Isomorphismus.
Hierfür sind natürlich die Einschränkungen auf passende offene Mengen $U \subseteq X$, auf denen φ (<u>lokal</u>) invertierbar ist, zu betrachten.

q.e.d.

Beispiel 3.1.11.

i) Sei $D = 0$ Divisor $\Rightarrow \mathscr{O}_D = \mathscr{O}$.

ii) Sei $a \in X, D(x) := \begin{cases} -1, \text{ falls } x = a. \\ 0, \text{ sons} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathscr{O}_D(U) = \begin{cases} \mathscr{O}(U), \text{ falls } U \cap \{a\} = \emptyset \\ \{f \in \mathscr{O}(U) \big| f \textit{ hat Nullstelle der Ordnung } \geq 1 \textit{ in } a\}, \text{ falls } U \cap \{a\} \neq \emptyset \end{cases}$$

iii) Sei $b \in X, D(x) := \begin{cases} 1, \text{ falls } x = b \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathscr{O}_D(U) = \begin{cases} \mathscr{O}(U), \text{ falls } U \cap \{a\} = \emptyset \\ \left\{ f \in \mathscr{M}(U) \big| f_{\big|U \setminus \{a\}} \textit{ hol.,} f \textit{ hat Polstelle der Ordnung } \leq 1 \textit{ in } a \right\}, \text{ falls } U \cap \{a\} \neq \emptyset \end{cases}$$

iv) Etwas allgemeiner: Seien $m, n \in \mathbb{N}_0, a, b \in X, D(x) := \begin{cases} -m, \text{ falls } x = a \\ n, \text{ falls } x = b \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathscr{O}(U) = \begin{cases} \mathscr{O}_D(U), \text{ falls } U \cap \{a, b\} = \emptyset \\ \{f \in \mathscr{O}(U) \big| f \textit{ hast NS der Ordnung } \geq m \textit{ in } a\}, \text{ falls } U \cap \{a\} \neq \emptyset, U \cap \{b\} = \emptyset \\ \{f \in \mathscr{M}(U) \big| f \textit{ hast PS der Ordnung } \leq n \textit{ in } a\}, \text{ falls } U \cap \{a\} = \emptyset, U \cap \{b\} \neq \emptyset \\ \{f \in \mathscr{M}(U) \big| f \textit{ hast NS der Ordnung } \geq m \textit{ und PS der Ordnung } \leq n \textit{ in } a\}, \text{ sonst} \end{cases}$$

Satz 3.1.12. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$ mit $deg(D) < 0$*

$$\Rightarrow H^0(X, \mathscr{O}_D) = 0.$$

Beweis. Angenommen, $\mathscr{O}_D(X) \neq 0$
$\Rightarrow \exists f \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\} : (f) \geq -D$
$\Rightarrow deg((f)) \geq \underbrace{deg(-D)}_{-deg(D)} > 0 \lightning\ deg(f) = 0$, da f meromorph und nicht trivial.

q.e.d.

Konstruktion 3.1.13. Seien X Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$.
Sei ferner $D' \in Div(X)$ ein weiterer Divisor mit $D \leq D'$.
$\Rightarrow \mathscr{O}_D(U) \subseteq \mathscr{O}_{D'}(U)\ \forall U \subseteq X$ offen
$\Rightarrow \mathscr{O}_D \hookrightarrow \mathscr{O}_{D'}$ natürlicher (Inklusions-)Garbenhomomorphismus.
Sei $x \in X$ und (U, z) Koordinatenumgebung von x so, dass $z(x) = 0$.
Sei des Weiteren $k := D(x)$ und $k' := D'(x)$, also $k' \geq k$, so besteht der Halm $\mathscr{O}_{D,x}$ aus allen meromorphen Funktionskeimen f in x, deren Laurent-Entwicklung folgende Gestalt hat:

$$f = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu \ , c_\nu \in \mathbb{C}$$

Eine analoge Aussage gilt für $\mathscr{O}_{D',x}$.
$\Rightarrow \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $k' - k$. Die Elemente dieses Vektorraumes kann man also bei gegebener lokalen Koordinate z eindeutig repräsentieren:

$$\sum_{\nu=-k'}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=-k'}^{-k-1} c_\nu z^\nu \quad + \underbrace{\sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu}_{=0 \ in \ \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x}}$$

$$= \boldsymbol{\sum_{\nu=-k'}^{-k-1} c_\nu z^\nu} \ in \ \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x}$$

Nun definiert man die **Garbe** $\boldsymbol{\mathscr{H}_{D'}^{D}}$ durch

$$\mathscr{H}_{D'}^{D}(U) := \prod_{x \in U} \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x}$$

und die natürlichen Beschränkungsabbildungen.

Bemerkung 3.1.14. Sei X Riemannsche Fläche, $D, D' \in Div(X)$ mit $D \leq D'$.
Existiert nun $U \subseteq X$ offen mit $D\big|_U = D'\big|_U$, so gilt $\mathscr{H}_{D'}^{D}(U) = 0$.
Folglich gilt also für alle $x \in X$ mit $D(x) = D'(x)$, dass $\mathscr{H}_{D',x}^{D} = 0$.
Allgemein gilt $\mathscr{H}_{D',x}^{D} = \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x}$, also hat man einen kanonischen **Garben-Epimorphismus** $\mathscr{O}_{D'} \to \mathscr{H}_{D'}^{D}$, d.h.

$$\mathscr{O}_{D'} \to \mathscr{H}_{D'}^{D} \to 0 \text{ ist exakt.}$$

Ferner stellt man leicht fest, dass der Kern dieses Epimorphismus $\mathscr{O}_D$ ist, also erhält man zusammenfassend folgende exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathscr{O}_D \to \mathscr{O}_{D'} \to \mathscr{H}_{D'}^{D} \to 0.$$

Lemma 3.1.15. *Mit obigen Bezeichnungen gilt:*

$$i)\ H^1(X, \mathscr{H}_{D'}^D) = 0$$

Ist X kompakt, so gilt ferner sogar

$$ii)\ dim(H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D)) = deg(D') - deg(D).$$

Beweis. Sei $S := \{x \in X \big| D(x) \neq D'(x)\} \overset{2.1.14}{\Longrightarrow} S$ abgeschlossen und diskret.

i) Sei $\xi \in H^1(X, \mathscr{H}_{D'}^D)$ eine Cohomologieklasse, die durch einen Cozyklus aus $Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{H}_{D'}^D)$ repräsentiert wird.
S diskret $\Rightarrow \exists (V_k)_{k \in K} =: \mathfrak{V} \leq \mathfrak{U}$ Verfeinerung, sodass
   1) $\forall V_k\ \exists^{\leq 1} x \in S$,
   2) $\forall x \in S\ \exists! V_k \in \mathfrak{V} : x \in V_k$.
Sei $k \neq l \Rightarrow D\big|_{V_k \cap V_l} = D'\big|_{V_k \cap V_l} \Rightarrow \mathscr{H}_{D'}^D(V_k \cap V_l) = 0 \Rightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{H}_{D'}^D) = 0$
(, da $(f_{k,l})_{k,l \in K} \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathscr{H}_{D'}^D) \Leftrightarrow f_{k,k} = 0$ und $-f_{l,k} = \underbrace{f_{k,l}}_{\in \mathscr{H}_{D'}^D(V_k \cap V_l)} = 0$)
$\Rightarrow \xi = 0. \checkmark$

ii) X kompakt $\Rightarrow \#S < \infty$ und

$$\begin{aligned} dim(H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D)) &= dim(\mathscr{H}_{D'}^D(X)) = dim \prod_{x \in S} \mathscr{O}_{D',x}/\mathscr{O}_{D,x} \\ &= \sum_{x \in S} (D'(x) - D(x)) = deg(D') - deg(D). \end{aligned}$$

q.e.d.

Vorheriger Satz, sowie vorherige Bemerkung liefern nun:

Korollar 3.1.16. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X, so ist die folgende Sequenz exakt*

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \to H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \to H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D) \to H^1(X, \mathscr{O}_D) \to H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \to 0.$$

3.2 Der Satz von Riemann-Roch

Nun ist es geschafft. Alle notwendigen Vorbereitungen für das Kernelement dieser Arbeit sind getroffen, wodurch es nun möglich ist, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3.2.1. *(***von Riemann-Roch***)*
Für jeden Divisor D auf einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g sind $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ und $H^1(X, \mathscr{O}_D)$ endlich dimensionale Vektorräume und es gilt

$$dim\left(H^0(X, \mathscr{O}_D)\right) - dim\left(H^1(X, \mathscr{O}_D)\right) = 1 - g + Deg(D).$$

Beweis. Man geht in 3 Schritten vor:

1. Die Aussage ist richtig für den Divisor D=0, da $\mathscr{O}_0 = \mathscr{O}$
$\Rightarrow H^0(X, \mathscr{O}) = \mathscr{O}(X) \overset{2.1.12}{=\!=\!=} \{f : X \to \mathbb{C} \big| f \ konstant\}$

$$\Rightarrow dim(H^0(X, \mathscr{O})) = dim(\mathscr{O}(X)) = 1$$
$$\Leftrightarrow dim\left(H^0(X, \mathscr{O}_D)\right) - \underbrace{dim\left(H^1(X, \mathscr{O})\right)}_{=g} = 1 - g + \underbrace{deg(D)}_{=0}. \checkmark$$

2. Angenommen, $D \leq D'$ seien zwei Divisoren auf X, wobei die Aussage für einen der beiden Divisoren gelte. Betrachte nun die exakte Sequenz aus letztem Kapitel

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \to H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \to H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D) \\ \to H^1(X, \mathscr{O}_D) \to H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \to 0 \end{aligned}$$

und spalte diese in drei kurze exakte Sequenzen.
Seien hierfür

$$\begin{aligned} V_{D'}^D &:= Im(H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \to H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D)) \\ W_{D'}^D &:= H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D)/V_{D'}^D, \end{aligned}$$

so konstruiert man die exakten Sequenzen
  i) $0 \to V_{D'}^D \to H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D) \to W_{D'}^D \to 0$
  ii) $0 \to H^0(X, \mathscr{O}_D) \to H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \to V_{D'}^D \to 0$
  iii) $0 \to W_{D'}^D \to H^1(X, \mathscr{O}_D) \to H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \to 0$

Aus der Algebra ist nun bekannt, das folgende Isomorphiebeziehungen gelten
  i) $H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D) \cong V_{D'}^D \oplus W_{D'}^D$,
  ii) $H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) \cong H^0(X, \mathscr{O}_D) \oplus V_{D'}^D$ und
  iii) $H^1(X, \mathscr{O}_D) \cong W_{D'}^D \oplus H^1(X, \mathscr{O}_{D'})$.

Nun stellt man also mittels der folgenden Dimensionsgleichungen fest, dass alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional sind
  i) $\underbrace{dim(H^0(X, \mathscr{H}_{D'}^D))}_{=Deg(D') - Deg(D) < \infty} = dim(V_{D'}^D) + dim(W_{D'}^D)$
  ii) $dim(H^0(X, \mathscr{O}_{D'})) = dim(H^0(X, \mathscr{O}_D)) + dim(V_{D'}^D)$
  iii) $dim(H^1(X, \mathscr{O}_D)) = dim(W_{D'}^D) + dim(H^1(X, \mathscr{O}_{D'}))$

Addiert man nun $ii) + iii)$, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} dim(H^0(X, \mathscr{O}_{D'})) - dim(H^1(X, \mathscr{O}_{D'})) - deg(D') = \\ = dim(H^0(X, \mathscr{O}_D)) - dim(H^1(X, \mathscr{O}_D)) - deg(D) \end{aligned}$$

Nach Annahme steht auf einer der beiden Seiten nun nichts anderes als **1-g**.$\checkmark$

3. Nach 1. gilt der Satz für alle Divisoren D' auf X mit $D' \geq 0$
   Sei nun D ein beliebiger Divisor, so gilt für
   $$D' : X \to \mathbb{Z}, x \mapsto |D(x)|,$$
   dass $D' \geq 0$ **und** $D' \geq D$
   $\Rightarrow$ Der Satz gilt für $D \in Div(X)$ beliebig.

q.e.d.

Korollar 3.2.2. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, so gilt*

$$dim(H^0(X, \mathcal{O})) = 1$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Satz von Riemann-Roch.

q.e.d.

Satz 3.2.3. *Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und a ein Punkt aus X, so gibt es eine nicht-konstante meromorphe Funktion f auf X, die in a einen Pol der Ordnung $\leq g+1$ besitzt und sonst holomorph ist.*

Beweis. Betrachte folgenden Divisor auf X

$$D(x) := \begin{cases} g+1, x = a \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Mit dem Satz von Riemann-Roch gilt folglich:

$$dim(H^0(X, \mathcal{O}_D)) \geq 1 - g + deg(D) = 2,$$

d.h. es existiert eine nicht konstante Funktion $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$.
Diese Funktion erfüllt die im Satz geforderten Eigenschaften.

q.e.d.

4 Weiterer Ausblick: Der Serrsche Dualitätssatz

Da die Riemann-Rochsche Formel keine direkte Aussage für die einzelnen Dimensionen von $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ und $H^1(X, \mathscr{O}_D)$ liefert, soll folgendes Thema noch ein wenig ausgeführt werden, damit zumindest $H^1(X, \mathscr{O}_D)$ besser verstanden werden kann. Da dieses Thema lediglich einen Ausblick geben soll, werden einige Tatsachen unbewiesen bleiben, was hier durch $^{(*)}$ gekennzeichnet wird.

4.1 Differentialformen 2. Ordnung

Im Folgenden soll das Kapitel 2.3 der Differentialformen noch ein wenig erweitert werden und zwar durch *Differentialformen 2. Ordnung* und gewissen Operationen auf diesen Differentialformen.
Das Dachprodukt " $\wedge$ " sollte dem Leser aus der Analysis 3 bereits bekannt sein.

Wiederholung 4.1.1.

1. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so ist auch $V \wedge V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, dessen Elemente endliche Summen der Form $v_1 \wedge v_2$ mit $v_1, v_2 \in V$ sind.

2. Auf $V \wedge V$ gelten für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ folgende Rechenregeln:
   i) $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$
   ii) $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2) = v_1 \wedge (\lambda v_2)$
   iii) $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ und folglich $v \wedge v = 0 \; \forall v \in V$

3. Ist $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis von V, so ist $e_i \wedge e_j, i < j$ eine Basis von $V \wedge V$.

Bemerkung & Definition 4.1.2. Seien X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen.

1. Sei $a \in X$, so stellt man mit Hilfe von 4.1.1 fest dass, falls (U, z) mit $z = x + iy$ eine Koordinatenumgebung von a ist und ferner
$$\boldsymbol{T_a^{(2)}} := T_a^{(1)} \wedge T_a^{(1)},$$
so erhält man mittels 2.3.5
   i) $d_a x \wedge d_a y$,
   ii) $d_a z \wedge d_a \overline{z} = (d_a x + i d_a y, \wedge (d_a x - i d_a y) = -2i d_a x \wedge d_a y$

   als Basen von $T_a^{(2)}$, also gilt
$$dim\left(T_a^{(2)}\right) = 1.$$

2. Eine **Differentialform 2. Ordnung auf $\boldsymbol{X}$** ist eine Abbildung
$$\omega : Y \to \bigcup_{a \in Y} T_a^{(2)}$$
mit $\omega(a) \in T_a^{(2)} \; \forall a \in Y$.

3. Eine Differentialform 2. Ordnung ω heißt **differenzierbar**

   $:\Leftrightarrow \forall (U,z)$ *komplexe Karte von* X $\exists f \in \mathscr{E}(U\cap Y) : \omega(a) = f(a) d_a z \wedge d_a \overline{z}\ \forall a \in U \cap Y.$

   Kurz: $\omega = f dz \wedge d\overline{z}$.

4. $\boldsymbol{\mathscr{E}^{(2)}(Y)} := \{\omega$ *Differentialform 2. Ordnung auf* $Y | \omega$ *differenzierbar*$\}$ ist $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiel 4.1.3. Seien X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq X$ offen.

1. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{E}^{(1)}(Y)$
   $\Rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathscr{E}^{(2)}(Y)$, wobei $\omega_1 \wedge \omega_2(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a)\ \forall a \in Y$.

2. Seien $f \in \mathscr{E}(Y), \omega \in \mathscr{E}^{(2)}(Y) \Rightarrow f\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(Y)$, wobei $f\omega(a) := f(a)\omega(a)\ \forall a \in Y$.

Im folgenden soll eine Ableitungen von (differenzierbaren) Differentialformen, sprich Abbildungen $\mathscr{E}^{(1)}(U) \to \mathscr{E}^{(2)}(U)$, wobei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche X ist, konstruiert werden.

Konstruktion 4.1.4. Sei X eine Riemannsche Fläche, $U \subseteq X$ offen.

1. Sei $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$, so lässt sich ω zumindest **lokal**, sprich auf einer offenen Menge $V \subseteq X$, nach Def. 2.3.10 wie folgt darstellen
   $$\omega = \sum_{k=1}^{2} f_k dg_k$$
   , wobei $f_k, g_k \in \mathscr{E}(V \cap U)$ differenzierbare Funktionen sind.

2. Setze nun

   i) $\boldsymbol{d\omega} := \sum_{k=1}^{2} df_k dg_k$

   ii) $\boldsymbol{d'\omega} := \sum_{k=1}^{2} d'f_k dg_k$

   iii) $\boldsymbol{d''\omega} := \sum_{k=1}^{2} d''f_k dg_k$

   Da die lokale Darstellung im Allgemeinem nicht eindeutig ist, muss also gezeigt werden, dass die obigen Definitionen nicht von der Wahl der Funktionen für die lokale Darstellung abhängig sind. Beispielhaft wird dies für die Definition von $d\omega$ gezeigt:
   Sei $\omega = \sum_{k=1}^{2} f_k dg_k = \sum_{j=1}^{2} \tilde{f}_j d\tilde{g}_j$ und $(U, z$ mit $z = x + iy$ die Koordinatenumgebung, auf der gearbeitet wird.

   Da $dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy$, sowie $d\tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} dy$ gelten folglich

   i) $\sum_{k=1}^{2} f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{2} f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum\limits_{j=1}^{2} \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}$

Bildet man nun die jeweils anderen partiellen Ableitungen und Subtrahiert ii) von i), so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right)$$

Ferner rechnet man nach, dass

$$\sum_{k=1}^{2} df_k \wedge dg_k = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) \text{ bzw. } \sum_{j=1}^{2} d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} \right),$$

woraus die Behauptung folgt.

Korollar 4.1.5. *Seien X Riemannsche Fläche, $U \subseteq X$ offen, $f \in \mathscr{E}(U)$, $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$, so gelten*

1. $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$,
2. $d\omega = d'\omega + d''\omega$ *und*
3. $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$, *analog für* d', d''.

Beweis.
Folgt durch Nachrechnen mittels Definitionen. □

4.2 Der Serrsche Dualitätssatz

Satz 4.2.1. *(von Dolbeault) Sei X eine Riemannsche Fläche, so gelten*

1. $H^1(X, \mathscr{O}) \cong \mathscr{E}^{0,1}(X)/d''\mathscr{E}(X)$
2. $H^1(X, \Omega) \cong \mathscr{E}^{(2)}(X)/d\mathscr{E}^{1,0}(X)$

Beweis. Betrachtet man zunächst die von den beiden exakten$^{(*)}$ Sequenzen

1. $0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{i} \mathscr{E} \xrightarrow{d''} \mathscr{E}^{0,1} \to 0$
2. $0 \to \Omega \xrightarrow{i} \mathscr{E}^{0,1} \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(2)} \to 0$

induzierten exakten Cohomologiesequenzen

1. $\underbrace{\mathscr{O}(X)}_{=H^0(X,\mathscr{O})} \xrightarrow{i_X} \mathscr{E}(X) \xrightarrow{d''_X} \mathscr{E}^{0,1}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{O}) \xrightarrow{i^1} \underbrace{H^1(X, \mathscr{E})}_{=^{(*)}0}$
2. $\Omega(X) \xrightarrow{i_X} \mathscr{E}^{0,1}(X) \xrightarrow{d_X} \mathscr{E}^{(2)}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \Omega) \xrightarrow{i^1} \underbrace{H^1(X, \mathscr{E}^{0,1})}_{=^{(*)}0},$

so folgt mittels Korollar 2.5.9 direkt die Aussage. □

Definition 4.2.2. Sei $\xi \in H^1(X,\Omega)$ und $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ ein Repräsentant von ξ bez. des in 4.2.1 2. gegebenen Isomorphismus, so erhält man mittels

$$Res : H^1(X,\Omega) \to \mathbb{C}, \xi \mapsto \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_X \omega$$

eine Linearform. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ω.$^{(*)}$

Konstruktion 4.2.3. Sei X Riemannsche Fläche, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von X, $\mathscr{M}^{(1)}$ Garbe der meromorphen Differentialformen auf X.

$$\mu = (\omega_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)}) \textit{ heißt } \textbf{\textit{Mittag-Leffler-Verteilung}} \;:\Leftrightarrow \delta_0(\mu) \in Z^1(\mathfrak{U},\Omega)$$
$$\Leftrightarrow \omega_j - \omega_i \textit{ holomorph in } U_i \cap U_j \ \forall i,j \in I.$$

Sei $a \in X$, so ist $\boldsymbol{Res_a(\mu) := Res_a(\omega_j)}$ das **Residuum** der Mittag-Leffler-Verteilung $\mu = (\omega_i)_{i\in I}$,wobei $j \in I$ so gewählt ist, dass $a \in U_j$.
Diese Definition ist unabhängig vom gewähltem j bzw. U_j, da $\omega_i - \omega_j$ holomorph auf $U_i \cap U_j$ ist, diese beiden Differentialformen also dasselbe Residuum besitzen.$^{(*)}$
Ist ferner X kompakt, so gilt $Res_a(\mu) \neq 0$ für nur endlich viele Punkte a, wodurch folgende Definition möglich ist:

$$\boldsymbol{Res(\mu) := \sum_{a\in X} Res_a(\mu)}$$

Satz 4.2.4. *Mit obigen Bezeichnungen gilt* $Res(\mu) = Res([\delta(\mu)]_\sim)$.

Beweis. Siehe [01]Forster, S.121 17.3

q.e.d.

Bemerkung & Definition 4.2.5. Sei X eine kpt. Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$.

1. $\boldsymbol{\Omega_D := \{\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X) \big| (\omega) \geq -D\}} \subseteq \mathscr{M}^{(1)}$ ist eine Garbe.
2. $\Omega_0 = \Omega$.
3. Sei $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)$ nicht verschwindend, d.h. $\omega(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, also z.B. $\omega = df, f \in \mathscr{M}(X)$ nicht konstant, so induziert die Multiplikation mit ω einen Garbenisomorphismus

$$\mathscr{O}_{D+(\omega)} \xrightarrow{\cong} \Omega_D, f \mapsto f\omega.$$

Proposition 4.2.6. *Seien X kpt. Riemannsche Fläche mit Geschlecht* $g, D \in Div(X)$

$$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z} : dim(H^0(X,\Omega_D)) \geq deg(D) + k_0.$$

Beweis. Sei $\omega = df, f \in \mathscr{M}(X)$ nicht konstant.
Setze $k_0 := 1 - g + deg((\omega))$, so gilt laut dem Satz von Riemann- Roch:

$$dim\left(H^0(X,\Omega_D)\right) \overset{4.2.5\ 3.}{=\!=\!=} dim\left(H^0(X,\mathscr{O}_{D+(\omega)})\right)$$
$$= dim\left(H^1(X,\mathscr{O}_{D+(\omega)})\right) + 1 - g + deg(D + (\omega)) \geq deg(D) + k_0$$

q.e.d.

Wiederholung 4.2.7. Sei V ein K-Vektorraum.

1. Der **Dualraum von V** ist der Raum aller ($\boldsymbol{K}$-)linearen Abbildungen $f : V \to K$. Notation: $\boldsymbol{V^* := Hom_K(V, K)}$
2. $dim(V) < \infty \Rightarrow dim(V) = dim(V^*)$.
3. Sei W ein weiterer $\boldsymbol{K}$-Vektorraum, so induziert eine lineare Abbildung $F : V \to W$ eine lineare Abbildung
$$\boldsymbol{F^* : W^* \to V^*, f \mapsto F^*(f) := f \circ F}$$
zwischen den Dualräumen W^* und V^*, welche auch die **zu $\boldsymbol{F}$ duale Abbildung** genannt wird.

Wiederholung 4.2.8. Seien U, V, W K-Vektorräume, $F, G : U \to V, H : V \to W$ K-lineare Abbildungen, so gelten

1. F injektiv $\Leftrightarrow F^*$ surjektiv.
2. F surjektiv $\Leftrightarrow F^*$ injektiv.
3. $(F + G)^* = F^* + G^*$.
4. $(H \circ F)^* = F^* \circ H^*$.

Bemerkung & Definition 4.2.9. Seien X kpt. Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$, so induziert das Produkt

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \to \Omega, (\omega, f) \mapsto \omega f$$

eine Abbildung

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega)$$

Die Zusammensetzung dieser Abbildung mit $Res : H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ liefert eine bilineare Abbildung

$$<,>: H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C}, (\omega, \xi) \mapsto < \omega, \xi > := Res(\xi\omega)$$

Um das ganze etwas klarer zu machen, erinnere man sich noch einmal kurz daran, wie die Multiplikation von ω und ξ funktioniert.
Sei also $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ und $(f_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ ein Repräsentant von ξ, wobei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist, so ist

$$f \cdot \omega = \left(f_{i,j} \cdot \omega\big|_{U_i \cap U_j} \right)_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega).$$

Die oben genannte Abbildung induziert nun eine lineare Abbildung

$$\boldsymbol{\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathscr{O}_D)^*}$$

von $H^0(X, \Omega_{-D})$ in den Dualraum $H^1(X, \mathscr{O}_D)^*$ von $H^1(X, \mathscr{O}_D)$.
Der Serrsche Dualitätssatz, welcher in diesem Kapitel bewiesen wird, besagt dass $<,>$ eine **duale Paarung** ist, d.h. dass ι_D ein Isomorphismus ist.

Satz 4.2.10. *Die Abbildung ι_D ist injektiv.*

Beweis. Es wird gezeigt, dass
$Ker(\iota_D) = \{\omega \in H^0(X, \Omega_D) \big| < \omega, \xi >= 0 \ \forall \xi \in H^1(X, \mathscr{O}_D)\} = \{0\}$, also

$$\forall \omega \in H^0(X, \Omega_{-D}) \backslash \{0\} \ \exists \xi \in H^1(X, \mathscr{O}_D) :< \omega, \xi > \neq 0.$$

Sei $a \in X$ so gewählt, dass $D(a) = 0$.
Da $\{x \in X \big| D(x) \neq 0\}$ diskret ist, findet man eine Koordinatenumgebung (U_0, z) von a mit $z(a) = 0$ und $D_{\big|U_0} = 0$.
In U_0 lässt sich ein $f \in \mathscr{O}(U_0)$ finden, sodass $\omega = f dz$ in U_0.
Da $\omega \neq 0$ ist, sei nun U_0 so klein gewählt, dass f in $U_0 \backslash \{a\}$ keine Nullstelle hat.
Setze $U_1 = X \backslash \{a\}$, wodurch $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$ eine offene Überdeckung von X bildet.
Sei nun $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M})$, wobei $f_0 = (fz)^{-1}, f_1 = 0$, so ist

$$\eta\omega = \left(\tfrac{dz}{z}, 0\right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$$

eine Mittag-Leffler Verteilung mit

$$Res(\eta\omega) = \tfrac{1}{2\pi i} \iint\limits_X \eta\omega = \tfrac{1}{2\pi i} \iint\limits_{U_0} \tfrac{dz}{z} = 1.$$

Da $\delta_1 \circ \delta_0 = 0$, gilt $\delta_0(\eta) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_D)$.
Sei nun $\xi = [\delta_0(\eta)]_\sim \in H^1(X, \mathscr{O}_D)$, so gilt $\xi\omega = [\delta_0(\eta)]_\sim \cdot \omega = [\delta_0(\eta\omega)]_\sim$ und mit Satz 4.2.4 folglich

$$< \omega, \xi >= Res(\xi\omega) = Res([\delta_0(\eta\omega)]_\sim) = Res(\eta\omega) = 1.$$

q.e.d.

Bemerkung 4.2.11. Seien X kpt. Riemannsche Fläche $D, D' \in Div(X)$ mit $D' \leq D$.
Die Inklusion $0 \to \mathscr{O}_{D'} \to \mathscr{O}_D$ induziert nach 3.1.16 eine exakte Sequenz:

$$H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) \to H^1(X, \mathscr{O}_D) \to 0$$

Diese wiederum induziert eine exakte Sequenz der Dualräume:

$$0 \to H^1(X, \mathscr{O}_D)^* \xrightarrow{i^D_{D'}} H^1(X, \mathscr{O}_{D'})^*$$

Mit 4.2.9 erhält man folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X,\mathscr{O}_D)^* & \xrightarrow{i^D_{D'}} & H^1(X,\mathscr{O}_{D'})^* \\ & & \uparrow{\scriptstyle \iota_D} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_{D'}} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X,\Omega_{-D'}) \end{array}$$

Satz 4.2.12. *Seien mit obigen Bezeichnungen $\lambda \in H^1(X,\mathscr{O}_D)^*$ und $\omega \in H^0(X,\Omega_{-D'})$ mit*

$$i^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega)$$

so liegt ω bereits in $H^0(X,\Omega_{-D})$ und es gilt $\lambda = \iota_D(\omega)$.

Beweis. Angenommen, $\omega \notin H^0(X,\Omega_{-D}) \Rightarrow \exists a \in X : ord_a(\omega) < D(a)$.
Sei (U_0,z) Koordinatenumgebung von a mit $z(a)=0$. ω lässt sich in U_0 schreiben als $\omega = f dz$, wobei $f \in \mathscr{M}(U_0)$.
Wähle nun U_0 so klein, sodass

i) $D_{|U_0\backslash\{a\}} = 0$ und $D'_{|U_0\backslash\{a\}} = 0$ und

ii) f hat in $U_0\backslash\{a\}$ weder Null- noch Polstellen.

Wähle nun, analog zum Beweis von 4.2.10, $U_1 = X\backslash\{a\}$ und $\mathfrak{U} = (U_0,U_1)$ als offene Überdeckung von X. Sei nun $\eta = (f_0,f_1) \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{M})$, wobei $f_0 = (fz)^{-1}$ und $f_1 = 0$. Nun gilt

$$ord_x(\eta) = \begin{cases} ord(f_1) = \infty, x \in U_1 \\ 0, x \in U_0\backslash\{a\} \\ -ord_a(\omega), x = a \end{cases}$$

also mit i), ii) und $-ord_a(\omega) > -D(a)$ sogar $\eta \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D)$.
Außerdem gilt mit $U_0 \cap U_1 = U_0\backslash\{a\}$ und i)

$$\delta_0(\eta) \in Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}) = Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U},\mathscr{O}_{D'})$$

Sei nun ξ' die Cohomologieklasse von $\delta_0(\eta)$ in $H^1(X,\mathscr{O}_{D'})$ und ξ jene in $H^1(X,\mathscr{O}_D)$.
Es ist $\xi = 0$, da $\eta \in C^0(\mathfrak{U},\mathscr{O}_D)$ und laut Voraussetzung gilt

$$<\omega,\xi'> = \iota_{D'}(\omega)(\xi') = i^D_{D'}(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0,$$

jedoch gilt wegen $\eta\omega = \left(\frac{dz}{z}, 0\right)$

$$<\omega,\xi'> = Res(\eta\omega) = 1. \lightning$$

Also war die Annahme falsch und es gilt $\omega \in H^0(X,\Omega_{-D})$.

q.e.d.

Da $i^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega) = i^D_{D'}(\iota_D(\omega))$, folgt aus der Injektivität von $i^D_{D'}$ dass $\lambda = \iota_D(\omega)$.

Konstruktion 4.2.13. Seien X kompakte Riemannsche Fläche, $B, D \in Div(X)$. Für eine meromorphe Funktion $\Psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ induziert der Garbenmorphismus

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_D, f \mapsto \Psi \cdot f$$

eine lineare Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D),+$$

also auch eine lineare Abbildung über den Dualräumen

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*,$$

welche der ebenfalls mit Ψ bezeichnet wird.
Laut Definition gilt nun also

$$(\Psi\lambda)(\xi) = \lambda(\Psi\xi) \text{ für } \lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}).$$

Man erhält also folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\Psi} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_D} & & {\scriptstyle \iota_{D-B}}\uparrow \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\Psi} & H^0\left(X, \Omega_{-(D-B)}\right) \end{array}$$

, wobei der Pfeil in der zweiten Zeile ebenfalls die Multiplikation mit Ψ bedeutet, was aus der Bilinearität von $<,>$ aus 4.2.9 folgt, sprich $< \Psi\omega, \xi > = < \omega, \Psi\xi >$.

Satz 4.2.14. *Mit obigen Bezeichnungen ergibt sich:*
Seien $\Psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)\backslash\{0\}$, so ist die induzierte Abbildung

$$\Psi : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \textit{ injektiv.}$$

Beweis. Sei $A := (\Psi) \geq -B$ der Divisor von Ψ.
Die Abbildung $\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_D$ faktorisiert über

$$\mathcal{O}_{D-B} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\Psi\cdot} \mathcal{O}_D$$

, wobei i die gewöhnliche Inklusionsabbildung ist, d.h. $\Psi = (\Psi\cdot) \circ i$.
Ferner ist $\mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\Psi\cdot} \mathcal{O}_D$ ein Isomorphismus. Da die von der Inklusion i induzierte Abbildung $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})$ laut 3.1.16 ein Epimorphismus ist, ist

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\Psi\cdot} H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

ebenfalls einer, d.h. $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\Psi\cdot} H^1(X, \mathcal{O}_D)$ ist surjektiv, also ist die induzierte Abbildung über den Dualräumen injektiv.

q.e.d.

Satz 4.2.15. ***(Dualitätssatz von Serre)***
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$, so ist

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \xrightarrow{\cong} H^1(X, \mathscr{O}_D)^* \text{ ein Isomorphismus.}$$

Beweis. injektiv:✓(4.2.10)
surjektiv: Sei $\lambda \in H^1(X, \mathscr{O}_D)^*, \lambda \neq 0$
Sei ferner $P \in Div(X)$ mit $deg(P) = 1$ und für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n := D - nP$.
Ist nun $\Lambda \subseteq H^1(X, \mathscr{O}_{D_n})^*$ der Untervektorraum aller Linearformen der Gestalt $\Psi\lambda, \Psi \in H^0(X, \mathscr{O}_{nP})$, so gilt nach Satz 4.2.14 (Beweis)

$$\Lambda \cong \mathscr{O}_{nP}(X) = H^0(X, \mathscr{O}_{nP})$$

und folglich mit dem Satz von Riemann-Roch

$$dim(\Lambda) = dim(H^0(X, \mathscr{O}_{nP})) \geq 1 - g + n,$$

wobei g das Geschlecht von X ist.
Nach Satz 4.2.6 existiert ein $k_0 \in \mathbb{Z}$, sodass für den Untervektorraum $Im(\iota_{D_n}) \subseteq H^1(X, \mathscr{O}_{D_n})^*$ gilt

$$dim(Im(\iota_{D_n})) \overset{\iota_{D_n}\ inj.}{=\!=\!=} dim(H^0(X, \Omega_{-D_n})) \geq deg(-D_n) + k_0 = n + k_0 - deg(D)$$

Für $n > deg(D)$ ist also $deg(D_n) < 0$ und $H^0(X, \mathscr{O}_{D_n}) \overset{3.1.12}{=\!=\!=} 0$

$$\xRightarrow{Riemann-Roch} \underbrace{dim\left(H^1(X, \mathscr{O}_{D_n})\right)}_{<\infty} = dim\left(H^1(X, \mathscr{O}_{D_n})^*\right) = g - 1 - deg(D_n)$$

Sei nun n hinreichend groß gewählt, so gilt

$$\underbrace{dim(\Lambda) + dim(Im(\iota_{D_n}))}_{=2n+\ldots} > \underbrace{dim\left(H^1(X, \mathscr{O}_{D_n})^*\right)}_{=n+\ldots}$$

Folglich muss also gelten $\Lambda \cap Im(\iota_{D_n}) \neq 0$, d.h. es existiert ein $\Psi \in H^0(X, \mathscr{O}_{nP}), \Psi \neq 0$ und ein $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$, sodass $\Psi\lambda = \iota_{D_n}(\omega)$
Sei nun $A := (\Psi)$ der Divisor von Ψ, also $\frac{1}{\Psi} \in H^0(X, \mathscr{O}_A)$, und $D' := D_n - A$. Mit der Kommutativität des Diagramms aus 4.2.13 gilt folglich

$$i^D_{D'}(\lambda) = \left(i^D_{D_n} \circ i^{D_n}_{D'}\right)(\lambda) = \tfrac{1}{\Psi}(\Psi\lambda) = \tfrac{1}{\Psi}\iota_{D_n}(\omega) = \iota_{D'}\left(\tfrac{1}{\Psi}\omega\right)$$

Aus Satz 4.1.12 folgt sofort $\omega_0 := \frac{1}{\Psi}\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ und $\lambda = \iota_D(\omega_0)$
$\Rightarrow \iota_D$ ist surjektiv
$\Longrightarrow \iota_D$ ist ein Isomorphismus.

q.e.d.

Bemerkung 4.2.16. Da der Satz von Riemann-Roch die Endlichdimensionalität von $H^1(X, \mathscr{O}_D)$ liefert, liefert der Dualitätssatz folgende Dimensionsgleichung:

$$dim(H^1(X, \mathscr{O}_D)) = dim(H^0(X, \Omega_{-D})).$$

Ist $D = 0$, also der Divisor gleich der Nullabbildung, so erhält man

$$g = dim(H^1(X, \mathscr{O})) = dim(H^0(X, \Omega)),$$

d.h. das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche X ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger holomorpher Differentialformen auf X.
Den Satz von Riemann-Roch kann man also äquivalent folgendermaßen formulieren:

$$dim(H^0(X, \mathscr{O}_{-D})) - dim(H^0(X, \Omega_D)) = 1 - g - deg(D),$$

das heißt also, dass auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g die Differenz von der Maximalzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen, die Vielfache eines Divisors D sind, und der Maximalzahl linear unabhängiger meromorpher Differentialformen, die Vielfache von $-D$ sind, gleich $1 - g - deg(D)$ ist.

Satz 4.2.17. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, so gilt für den kanonischen Divisor K_X:*

$$deg(K_X) = 2g - 2$$

Beweis.

$$\begin{aligned} deg(K_X) &\overset{3.2.1}{=\!=\!=} dim(H^0(X, \mathscr{O}_{K_X})) - dim(H^1(X, \mathscr{O}_{K_X})) + g - 1 \\ &\underset{4.2.5\ 3.}{\overset{4.2.16}{=\!=\!=}} dim^0(\Omega) - dim^1(X, \Omega_{-K_X}) + g - 1 \\ &\underset{4.1.16}{\overset{3.2.2}{=\!=\!=}} g - 1 + g - 1 = 2g - 2 \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 4.2.18. *Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $D \in Div(X)$ mit $deg(D) > 2g - 2$, so gilt*

$$H^1(X, \mathscr{O}_D) = 0$$

Beweis. Sei $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)$ nicht verschwindend und K ihr Divisor.
$\overset{4.2.5}{\Longrightarrow} \Omega_{-D} \cong \mathscr{O}_{K-D} \overset{4.2.15}{\Longrightarrow} H^1(X, \mathscr{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^0(X, \mathscr{O}_{K-D})$.
Ferner gilt nun mit 4.2.17 $deg(K - D) < 0$, also folglich $H^0(X, \mathscr{O}_{K-D}) = 0$

q.e.d.

5 Anwendungsbeispiel: Einbettung vom komplexen Torus in $\mathbb{P}^2$

5.1 Vorbereitungen

Durch die neue Formulierung vom Satz von Riemann Roch ist es nun möglich, den komplexen Torus in den Projektiven Raum $\mathbb{P}^2$, genauer in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ einzubetten. Hierfür werden zunächst ein paar Grundlagen geschaffen.

Bemerkung & Definition 5.1.1. Seien H, X Riemannsche Flächen.

1. Unter einem **holomorphen Geradenbündel über X** versteht man eine holomorphe Abbildung $p : H \to X$ mit folgenden Eigenschaften:
   i) $\forall x \in X$ weist die Faser $p^{-1}(x)$ eine 1-dim. VR-Struktur auf,
   ii) $\forall x \in X\ \exists U \subseteq X$ offene Umgebung von x und eine **lokale Trivialisierung φ von H über U**, d.h. es existiert eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften
      i. $\forall y \in U : \varphi\big|_y : y \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} p^{-1}(y)$ ist Isomorphismus von Vektorräumen.
      ii. $p \circ \varphi = \pi_1$, wobei π_1 die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet.
2. Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von X so, dass für alle U_i eine lokale Trivialisierung φ_i von H über U_i existiert.
   Unter dem sogenannten **Kartenwechsel des holomorphen Geradenbündels bezüglich $\mathfrak{U}$** versteht man die Abbildungen $g_{i,j} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, i, j \in I$, welche durch die Eigenschaft $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x, z) = (x, g_{i,j}(z))$ für alle $i, j \in I$ eindeutig festgelegt werden und offensichtlich holomorph sind.
   (Insb. hängen die Funktionen $g_{i,j}$ also von der Wahl der offenen Mengen U_i und U_j ab.)

Im Folgenden wird "$p : H \to X$ sei holomorphes Geradenbündel über X" gelegentlich mit "H ist holomorphes Geradenbündel über X" abgekürzt.

Folgende Proposition, für welche lediglich eine Beweisskizze gemacht wird, zeigt, dass man Geradenbündel über einer Riemannschen Fläche X durch Kartenwechsel bezüglich einer Überdeckung beliebigen $\mathfrak{U}$ von X festlegen kann.

Proposition 5.1.2. *Seien X eine Riemannsche Fläche, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $(g_{i,j})_{(i,j) \in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, so existiert ein holomorphes Geradenbündel H über X, welches trivial über jedem U_i ist und ferner die Elemente $g_{i,j}, i, j \in I$ gerade die Kartenwechsel von H bezüglich $\mathfrak{U}$ sind.*

Beweis. Definiere zunächst den Quotienten $H := \left(\bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C} \right) / \sim$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ für $x \in X, z, w \in \mathbb{C}$ durch

$$(x, z) \sim (x, w) :\Leftrightarrow \exists i, j \in I : x \in U_i \cap U_j \wedge w = g_{i,j}(z)$$

definiert ist.

Sei nun $p : H \to X, (x,z) \mapsto x$ die Projektion, so bilden die Karten, welche auf den offenen Mengen $p^{-1}(U_i) = (U_i \times \mathbb{C})/\sim$ gegeben sind, einen komplexen Atlas für H.
Man zeige hierfür zunächst, dass es natürliche Homöomorphismen von $U_i \times \mathbb{C}$ nach $p^{-1}(U_i)$ gibt, und dass diese Karten H zu einer Riemannschen Fläche werden lassen.
Nun ist H trivial über allen U_i, die Kartenwechsel sind gerade die gewünschten $g_{i,j}, i,j \in I$ und ferner kann man zeigen, dass p holomorph ist.

q.e.d.

Definition 5.1.3. Seien H, X Riemannsche Flächen.

1. Sei $p : H \to X$ ein holomorphes Geradenbündel über $X, U \subseteq X$ offen.
   Eine holomorphe Abbildung $s : U \to H$ heißt **holomorpher Schnitt von H über U**, falls $p \circ s = id_U$, d.h. s bildet jeden Punkt x auf einen Punkt in der Faser $p^{-1}(x)$ ab.
2. Ist $U = X$, so nennt man ein solches s auch **globalen holomorphen Schnitt**.
3. Einen nicht verschwindenden holomorphen Schnitt von H über U nennt man einen **lokalen Rahmen** für H.

Bemerkung 5.1.4.

1. Die Existenz eines lokalen Rahmens für H über U ist äquivalent zur Existienz einer lokalen Trivialisierung H über U.
2. Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung einer Riemannschen Fläche X und $g_{i,j}, i,j \in I$ seien Kartenwechsel von H bez. $\mathfrak{U}$, so gilt:
   $$\exists \text{ globaler Hol. Schnitt } H \Leftrightarrow \forall U_i \ \exists f_i \in \mathscr{O}(U_i) : f_j = g_{i,j} \circ f_i \ \forall j \in I.$$

5.2 Konstruktion von Karten in den Projektiven Raum

Für dieses Kapitel sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und H ein holomorphes Geradenbündel über X. Sei ferner $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)$ der $\mathbb{C}$-VR aller globalen holomorphen Schnitte von H, so liefern bekannte Sätze aus der Analysis folgende Aussage, welche hier ohne Beweis zitiert wird:

Satz 5.2.1. $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)$ *ist endlichdimensional.*

Beweis. In viel größerer Allgemeinheit ist diese Aussage im Ergebnis von Cartan und Serre [12] enthalten.

Diskussion 5.2.2.
Sei nun $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)$ $(N+1)$-dimensional, wobei N hinreichend größer als n ist, so kann man stets eine Abbildung (von einem Untervektorraum) von X in den komplexen Projektiven Raum erhalten, d.h. diese Abbildung bildet in den endlichdimensionalen Projektiven Raum $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$ ab.
Dieser Raum ist auf die Art und Weise durch $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*$ definiert, wie $\mathbb{P}^N$ durch $\mathbb{C}^{N+1}$,

d.h. durch die Menge aller N-dimensionalen Untervektorräume von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*$. Durch die Wahl einer Basis von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*$ kann man diesen Vektorraum mit $\mathbb{C}^{N+1}$ identifizieren, was wiederum eine Identifikation von $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$ mit $\mathbb{P}^N$ liefert, d.h. man erhält auf $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit, welche isomorph zu $\mathbb{P}^N$ ist.
Die Wahl einer anderen Basis liefert auch eine andere Identifikation mit $\mathbb{P}^N$.
Die Idee ist, dass ein Punkt $x \in X$ ein Funktional auf Schnitten von H liefert, die sogenannte Bewertung in x, was wiederum ein Element aus $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$ liefert. Hierbei entstehen jedoch so einige Probleme, die man sich zunächst klar machen muss:

i) Zuerst liefert die Bewertung eines Schnittes von H in x lediglich ein Element der Faser von H in x, anstelle einer komplexen Zahl. Sobald man einen lokalen Rahmen gewählt hat, liefert ein Element aus der Faser eine komplexe Zahl, jedoch liefern verschiedene Rahmen hier auch verschiedene Zahlen.
Dies ist der Grund für den Übergang zum Projektiven Raum.

ii) Die Bewertung in x könnte das Null-Funktional auf Schnitten sein. In diesem Fall würden keine assoziierten Elemente vom Projektiven Raum existieren.

Im Allgemeinen erhält man in diesem Fall eine Abbildung von einem Untervektorraum von "guten" Punkten in X nach $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$.

Folgende Untersuchungen werden einige dieser Ideen konkretisieren:
Man definiert zunächst für $x \in X$ ein $\boldsymbol{\phi_H(x)}$ als **Vektorraum aller hol. Schnitte von $\boldsymbol{H}$, welche in $\boldsymbol{x}$ verschwinden**. Dies ist ein Untervektorraum von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*$ mit

$$dim(\phi_H(x)) = \begin{cases} N, \text{ falls nicht alle Schnitte von } H \text{ in } x \text{ verschwinden} \\ N+1, \text{ sonst} \end{cases}$$

Betrachtet man nun den Annihilator von $\phi_H(x)$ unter der Abbildung $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H) \times \Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^* \to \mathbb{C}$, so stellt man fest, dass dieser Untervektorraum von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*$ eine Gerade ist, falls gilt $dim(\phi_H(x)) = N$ und identisch 0 ist, falls gilt $dim(\phi_H(x)) = N+1$.
Ist dieser eine Gerade, so ist er folglich ein Element in $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X,H)^*)$.

Definition 5.2.3. Sei $x \in X$.

1. x heißt **Basispunkt** von H, falls alle hol. Schnitte von H in x verschwinden.
2. $\mathbb{B}(H) := \{x \in X \big| x \textit{ ist Basispunkt}\}$ ist die **Menge aller Basispunkte** von H.
3. H heißt **Basispunktfrei** $:\Leftrightarrow \mathbb{B}(H) = \emptyset$.

Konstruktion 5.2.4. Die oben genannten Bezeichnungen definieren eine Abbildung

$$\phi : X \backslash \mathbb{B}(H) \to \mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*).$$

Um diesen Formalismus mit der intuitiven Idee, welche zuvor diskutiert wurde, abzustimmen, ist es nützlich sich die einzelnen Koordinaten des Bildes von ϕ genauer anzuschauen. Betrachte hierfür zunächst $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*)$ als $\mathbb{P}^N$, durch Wahl einer Basis $s^0, ..., s^N$ für $\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)$, wodurch die duale Basis eine Identifikation von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*$ mit $\mathbb{C}^{N+1}$ liefert und letztlich die Identifikation von $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*)$ mit $\mathbb{P}^N$ folgt.
Angenommen $x \in X$ sei kein Basispunkt, so wähle einen lokalen Rahmen ξ für H auf einer offenen Umgebung von x. Definiere nun ein Funktional χ auf Schnitten von H, welches auf einem Schnitt s operiert, indem es diesen auf U einschränkt und anschließend, nachdem man s umgeschrieben hat in $s = \xi \circ \sigma$, wobei $\sigma \in \mathscr{O}(U)$, σ in x bewertet, d.h. konstruiere so, dass $\chi(s) = \sigma(x)$.
Es gilt $\chi \circ \phi_H(x) = 0$, wobei $\chi \neq 0$, da x kein Basispunkt ist.
Folglich erzeugt χ einen eindimensionalen Untervektorraum $\phi(x) \subset \Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*$.
Nun kann man die homogenen Koordinaten von χ bezüglich der Identifikation $\mathbb{P}(\Gamma_{\mathscr{O}}(X, H)^*) \cong \mathbb{P}^N$ (gegeben durch die zuvor gewählte Basis) also einfach durch die Bewertung von χ in s^i für alle $i \in \{0, ..., N\}$ erhalten.
Schreibe hierfür s^i lokal als $\xi \cdot \sigma^i$, so gilt $\chi(s^i) = \sigma^i(x)$, also hat $\phi(x)$ homogene Koordinaten $[\sigma^0(x), ..., \sigma^N(x)]$.
(Achtung, hier meint σ^i keine Potenz von σ, sondern eine zu s^i passende holomorphe Funktion.)
Um nicht jedes mal den lokalen Rahmen ξ zu erwähnen, wird im folgenden wie folgt abgekürzt:

$$\phi(x) = [s^0(x), ..., s^N(x)],$$

in Übereinkunft damit, dass jedes $s^i(x)$ durch Wahl eines lokalen Rahmens bewertet wird.
(Bemerke an dieser Stelle, dass bei der abstrakten Definition von ϕ zunächst kein konkreter Bezug zu einem bestimmtem Rahmen getroffen wurde, was zur Folge hat, dass die homogenen Koordinaten von $\phi(x)$ nicht von der Wahl von ξ abhängen.)
Die lokale Darstellung von ϕ liefert seine Holomorphie, da jede Koordinate s^i lokal durch eine in x holomorphe Funktion σ^i gegeben ist.
Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Abbildung ϕ, unter bestimmten Voraussetzungen, eine Einbettung X in den Projektiven Raum liefert.

5.3 Einbettungssatz

Mittels vorheriger Überlegungen ist es nun möglich, die Diskussion der Abbildungen in den Projektiven Raum mit jener über die Divisoren, welche man bereits in Kapitel 3 kennengelernt hat, zu verknüpfen, indem man feststellt, dass ein beliebiger Divisor D auf einer kompakten Riemannschen Fläche X ein holomorphes Geradenbündel $H = [D]$ über X induziert.
Dafür dient die folgende

Konstruktion 5.3.1. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in Div(X)$. Ruft man sich zunächst die Definition von der Ordnung einer holomorphen Funktion (s. 3.1.4) ins Gedächtnis, so ist folgende Tatsache ersichtlich:
Es existiert eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ von X und für alle $i \in I$ Funktionen $f_i \in \mathscr{O}(U_i)$, welche folgende Eigenschaft erfüllen:

$$D(p) = ord_p(f_i) \ \forall p \in U_i.$$

Folglich gilt für alle $i, j \in I$:

$$ord_p\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = 0 \text{ auf } U_i \cap U_j, \ \forall p \in U_i \cap U_j.$$

Das heißt nichts anderes, als dass die Funktionen $g_{i,j} := \frac{f_i}{f_j}$ nirgends verschwindende holomorphe Funktionen auf den Schnitten sind. Da diese Funktionen nirgends verschwinden, ist offensichtlich auch die Cozykelrelation erfüllt, denn es gilt

$$g_{i,k} = g_{i,j} \cdot g_{j,k} \ \forall i, j, k \in I,$$

also folgt $(g_{i,j})_{(i,j)\in I^2} \in Z^1(X, \mathscr{O}^*)$.
$\xRightarrow{5.1.2}$ $\boldsymbol{H := [D]}$ mit Kartenwechselabb. $g_{i,j}, i, j \in I$ ist ein hol. Geradenbündel.

Folgende Proposition zeigt nun, dass die Garbe $\mathscr{O}_D$ auch als $\mathscr{O}_{[D]}$, **die Garbe aller holomorphen Schnitte auf der Riemannschen Fläche $[D]$**, aufgefasst werden kann.

Proposition 5.3.2. *Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$*

$$\Rightarrow \mathscr{O}_D \cong \mathscr{O}_{[D]}.$$

Beweis. Sei $f \in \mathscr{O}_D(U), U \subseteq X$ offen und $f_i \in \mathscr{O}(U_i)$ wie in 5.3.1.
$\Rightarrow h_i := f \cdot f_i \in \mathscr{O}(U \cap U_i) \wedge \frac{h_i}{h_j} = \frac{f_i}{f_j} = g_{i,j}$ auf $U \cap U_i \cap U_j$
$\Rightarrow h_i, i \in I$ definieren holomorphe Schnitte von $[D]$ auf U.✓
Sei nun h holomorpher Schnitt von $[D]$ über U, so ist h nach 5.1.4 2. auf jedem $U \cap U_i$ durch holomorphe Funktionen h_i definiert, welche die folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\frac{h_i}{h_j} = g_{i,j} = \frac{f_i}{f_j} \text{ auf } U \cap U_i \cap U_j.$$

Da die Funktion $\tilde{f} = \frac{h_i}{f_i}$ auf dem Schnitt $U \cap U_i$ für alle $i \in I$ wohldefiniert ist, liefert dies uns eine auf ganz U meromorphe Funktion f, sprich $f \in \mathscr{O}_D(U)$. Offensichtlich sind diese Funktionen invertierbar und kommutieren mit den Kartenwechseln, folglich hat man also einen Isomorphismus von Garben gefunden.

q.e.d.

Mithilfe dieser Proposition ist man nun in der Lage, die Abbildung ϕ im Bezug auf $[D]$ (5.2.4), wobei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X ist, neu zu formulieren. Dies hat den Vorteil, dass man sich nicht mehr um die Basispunkte sorgen muss, sprich die Abbildung immer ein wohldefiniertes Element im Projektiven Raum für jedes $x \in X$ liefert, egal ob x ursprünglich ein Basispunkt war oder nicht.
Hierfür wird zunächst eine Abbildung in den Projektiven Raum im Bezug auf den Divisor D konstruiert und anschließend mithilfe der soeben bewiesenen Proposition gezeigt, inwiefern diese mit der Abbildung ϕ zusammenhängt.
Wie das ganze funktioniert, zeigt folgende

Konstruktion 5.3.3.
Proposition 5.3.2 zeigt, dass globale Schnitte von $[D]$ globale meromorphe Funktionen in $\mathscr{O}_D(X) = H^0(X, \mathscr{O}_D)$ liefern, folglich ist es sinnvoll, mit einer Basis $f_0, ..., f_N$ von $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ zu starten. Sei nun $x \in X$, so findet man eine Koordinatenumgebung z auf X mit $z(x) = 0$, welche x also zentriert.
Sei nun $k := min\{ord_x(f_\alpha) \big| \alpha \in \{0, ..., N\}\}$, so findet man für alle Basiselemente f_α eine in x holomorphe Funktion g_α, sodass gilt

$$f_\alpha = z^k g_\alpha.$$

Definiere nun

$$\iota_{[D]}(x) := [g_0(x) : ... : g_N(x)].$$

Diese Abbildung ist unabhängig von der Wahl von z.
Bemerke, x ist kein Basispunkt $\Leftrightarrow k = -D(x)$, jedoch ist diese Abbildung, wie zuvor bemerkt, auch im Falle, dass x kein Basispunkt ist, wohldefiniert.
Sei nun $x \in X$ kein Basispunkt, so ist zu zeigen, dass $\phi(x) = \iota_{[D]}(x)$.
Sei $s_0, ..., s_N$ eine Basis von $\Gamma_{\mathscr{O}}(X, [D])$. Um eine korrespondierende Basis $f_0, ..., f_N$ für $H^0(X, \mathscr{O}_D)$ zu erhalten, sind hierfür also eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X und Funktionen h_i auf U_i so zu finden, dass $(h_i) = D$ auf U_i.
Das erste U_i findet man, indem man eine Koordinatenumgebung U von x so wählt, dass

$$supp(D) \cap \{U\} = \{x\},$$

wobei $supp(D) := \overline{\{x \in X \big| D(x) \neq 0\}}$ der Träger von D ist.
Setze ferner $h = z^{-k}$ auf U mit $k = -D(x)$.
Ergänze dies nun zu einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X und konstruiere Funktionen $h_i, i \in I$, sodass die gewünschten Eigenschaften erfüllt werden.
Dies liefert nun eine Basis $f_0, ..., f_N$ von $H^0(X, \mathscr{O}_D)$, welche zu $s_0, ..., s_N$ passt.

Auf U_i erhält man nun

$$f_\alpha(z) = \tfrac{s_\alpha(z)}{z^{-k}} = z^k s_\alpha(z).$$

(Wie zuvor werden die s_α hier als holomorphe $\mathbb{C}$-Wertige Funktionen auf den jeweiligen U_i, welche für die Wahl eines anderen Rahmen ξ wieder anders aussehen, aufgefasst.) Folglich gilt nun also

$$\begin{aligned}\phi(z) &= [s_0(x) : ... : s_N(x)]\\ &= [g_0(x) : ... : g_N(x)]\\ &= \iota_{[D]}(x),\end{aligned}$$

wobei $f_\alpha(z) = z^k g_\alpha(z)$ mit $g_\alpha \in \mathscr{O}(U_i)$.

Diese Konstruktion ermöglicht nun den Beweis vom

Satz 5.3.4. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g, D \in Div(X)$ mit $deg(D) \geq 2g+1$. Sei ferner $f_0, ..., f_N$ eine Basis von $H^0(X, \mathscr{O}_D)$, so ist die Abbildung*

$$\iota_{[D]} : X \to \mathbb{P}^N$$

eine Einbettung der Riemannschen Fläche in den Projektiven Raum.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\iota_{[D]}$ eine Immersion ist.
$\underline{\iota_{[D]}\ \textit{injektiv}}$: Sei $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$.
Sei ferner

$$D'(x) := \begin{cases} D(x),\ x \neq x_2 \\ D(x) - 1,\ x = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow deg(D') \geq 2g$
$\xRightarrow{\mathbf{4.2.18}} H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) = 0.$

<u>Beh.:</u> $\mathscr{O}_{D'}$ ist **global erzeugt**, d.h. $\forall x \in X\ \exists f \in H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) : ord_x(f) = -D'(x)$
<u>Bew.:</u> Sei P der Divisor, der den Wert 1 bei x annimmt und sonst 0.
Angenommen $\nexists f \in H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) : ord_x(f) = -D'(x) \Rightarrow H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) = H^0(X, \mathscr{O}_{D'-P})$.
Ferner folgt mit $deg(D'), deg(D' - P) > 2g - 2$
$\xRightarrow{\mathbf{4.2.18}} H^1(X, \mathscr{O}_{D'}) = H^1(X, \mathscr{O}_{D'-P}) = 0$
Riemann-Roch liefert nun

$$H^0(X, \mathscr{O}_{D'}) = 1 - g + deg(D') \neq 1 - g + deg(D' - P) = H^0(X, \mathscr{O}_{D'-P}). \lightning \qquad \square$$

Insbesondere existiert also so ein f für $x = x_1$ (bzw. $x = x_2$).
Da $f_0, ..., f_N$ Basis von $H^0(X, \mathscr{O}_D)$, ex. $\lambda_\alpha \in \mathbb{C} : f = \sum\limits_{\alpha=0}^{N} \lambda_\alpha f_\alpha$.
Da ferner mit analoger Argumentation $\mathscr{O}_D$ global erzeugt ist, existiert $f_\alpha \in \{f_0, ..., f_N\}$ mit $k_i := ord_{x_i}(f_\alpha) = -D(x_i)$ für $i = 1, 2$, also geringste Ordnung in diesem Punkt.

Ähnlich wie in der Definition der Abbildung $\iota_{[D]}$, setze nun $f_\alpha = z_i^{k_i} g_{\alpha,i}$, wobei z_i in x_i zentriert ist.
Setze analog $f = z_i^{k_i} g_i$, wobei $g_1(x_1) \neq 0$.
Da $f \in H^0(X, \mathscr{O}_{D'})$ liegt, gilt $ord_{x_2}(f) \geq -D'(x_2) = -k_2 + 1$.
Folglich gilt also $g_2(x_2) = 0$.
Man erhält nun $g_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_\alpha g_{\alpha,i}(x_i)$ und $\iota_{[D]}(x_i) = (g_{1,i}(x_i), ..., g_{N,i}(x_i))$.
Setze nun $p(t_1, ..., t_N) = \sum\limits_{\alpha=0}^{N} \lambda_\alpha t_\alpha$.
Ferner gilt nun:

$$g_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow p(\iota_{[D]}(x_i)) = 0.$$

Mit $g_1(x_1) = p(\iota_{[D]}(x_1)) \neq 0 = p(\iota_{[D]}(x_2)) \Rightarrow \iota_{[D]}(x_1) \neq \iota_{[D]}(x_2)$.✓
<u>Immersion:</u> Funktioniert analog, jedoch wird anstelle von zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ lediglich ein Punkt $x_0 \in X$ betrachtet.
Sei nun

$$D'(x) := \begin{cases} D(x) & , x \neq x_0 \\ D(x) - 1, & x = x_0 \end{cases} .$$

Da $\mathscr{O}_{D'}$ global erzeugt ist, findet man ein f mit $ord_{x_0}(f) = D'(x_0) = D(x_0) + 1$.
Ferner existieren wieder $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $f = \sum\limits_{\alpha=0}^{N} \lambda_\alpha f_\alpha$.
Setze $k := -D(x_0)$ und $f_\alpha = z^k g_\alpha$, wobei z in x_0 zentriert ist.
Setze außerdem $f = z^k g$ in einer Umgebung von x mit $ord_{x_0}(g) = 1$, besitzt hier also eine einfache NS. Es gilt außerdem $g = \sum\limits_{\alpha=0}^{N} \lambda_\alpha g_\alpha$.
Weil $\mathscr{O}_D$ global erzeugt ist, ex. folglich wieder ein g_α, welches in x_0 nicht verschwindet, o.B.d.A. sei $g_0(x_0) \neq 0$.
Mittels einer Standardabbildung in den $\mathbb{P}^N$ lässt sich $\iota_{[D]}$ in einer Umgebung um x_0, nach der Identifikation von $[1, u_0, ..., u_N] \mapsto (u_0, ..., u_N)$, also als Element in $\mathbb{C}^N$, wie folgt schreiben

$$\iota_{[D]} = (F_1, ..., F_N) = \left(\tfrac{g_1}{g_0}, ..., \tfrac{g_N}{g_0}\right).$$

Nun gilt $\sum\limits_{\alpha=0}^{N} \lambda_i F_i = \frac{g}{g_0} - \lambda_0$.
Bildet man also das Differential dieser Abbildung, so ergibt sich folgende Tatsache

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \lambda_i dF_i = d\left(\tfrac{g}{g_0}\right) \neq 0, \text{ da } g \text{ in } x_0 \text{ eine NS 1. Ordnung besitzt und } g_0(x_0) \neq 0.$$

Folglich sind also nicht alle $dF_\alpha = 0$, d.h. $d\iota_{[D]}$ verschwindet nicht in $x_0 \in X$
$\xrightarrow{\iota_{[D]}\ inj.}$ $\iota_{[D]}$ ist eine Immersion.

q.e.d.

5.4 Einbettung vom komplexen Torus

In der Arbeit wurde in einem vorherigem Kapitel bereits gezeigt, dass das Geschlecht vom Torus gleich 1 ist. Folglich wird also der scheinbar etwas allgemeinere Satz bewiesen, welcher tatsächlich nur in Anbetracht des aktuellen Wissensstandes allgemeiner erscheint:

Satz 5.4.1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1, so existiert eine nicht singuläre Einbettung dieser Riemannschen Fläche (, d.h. die Ableitung verschwindet nirgends,) in den $\mathbb{P}^2$ in Form einer kubischen Kurve.*

Beweis. Zunächst die grobe Beweisidee:
Nach Satz 5.3.4 liefert für jeden Punkt $p \in X$ das vom Divior D_{3p}, welcher an der Stelle p den Wert 3 annimmt und sonst 0, erzeugte Geradenbündel $H = [D_{3p}]$ eine Einbettung von $\iota_H : X \to \mathbb{P}^N$, wobei $N = dim(H^0(X, \mathscr{O}_{D_{3p}})) - 1 \geq 2$ ist. Dieser Vektorraum enthält meromorphe Funktionen auf X, welche holomorph auf $X \backslash \{p\}$ sind und die Ordnung ≥ -3 in p, also maximal eine Polstelle der Ordnung 3, besitzen. Eine solche Funktion wird jedoch durch ihren Hauptteil

$$\tfrac{a_{-3}}{z^3} + \tfrac{a_{-2}}{z^2} + \tfrac{a_{-1}}{z}$$

in p eindeutig bestimmt.
Da keine meromorphe Funktion mit lediglich einer Polstelle in p existieren kann, liefert eine solche Funktion also eine Einbettung von X in $\mathbb{P}^2$. Man zeigt anschließend, dass $dim(H^0(X, \mathscr{O}_{D_{3p}})) \geq 3$, genauer sogar $dim(H^0(X, \mathscr{O}_{D_{3p}})) = 3$ und ist somit fertig.

Nach 2.3.15 existiert auf X keine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X, welche lediglich einen Pol in einem Punkt $p \in X$ besitzt und sonst keine weiteren Nullstellen. Sei nun $D_{n \cdot p}$ der Divisor, der in p den Wert n annimmt und sonst null, so gilt des Weiteren gilt nach 4.2.18

$$H^1(X, \mathscr{O}_{D_p}) = 0.$$

Sei nun $\mathbb{C}_{\boldsymbol{p}}$ die sogenannte **Wolkenkratzergarbe**, für die gilt $\mathbb{C}_p(U) := \begin{cases} 1, \text{ falls } p \in U \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$.

(Dies ist tatsächlich eine Garbe.$^{(*)}$)
Nach Konstruktion der folgenden exakten Garben-Sequenz

$$0 \to \mathscr{O}_{D_p} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_{D_{2p}} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0,$$

wobei für $U \subseteq X$ offen

$$\alpha_U : \mathscr{O}_{D_p}(U) \to \mathscr{O}_{D_{2p}}(U) \text{ die Inklusionsabbildung ist und}$$
$$\beta_U : \mathscr{O}_{D_{2p}}(U) \to \mathbb{C}_p(U), f \mapsto g(p), \text{ wobei } g(z) := (z-p)^2 \cdot f(z).$$

(Alternativ kann man $\beta_U(f) = a_{-2}$ setzen, also auf den (-2)-ten Koeffizient der [lokalen] Laurentreihenentwicklung von f abbilden.)

Nun liefert Satz 2.5.8, sprich die von der exakten Garbensequenz induzierte "lange" Sequenz über den Cohomologiegruppen

$$0 \to H^0(X, \mathscr{O}_{D_p}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathscr{O}_{D_{2p}}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\delta^*} \underbrace{H^1(X, \mathscr{O}_{D_p})}_{\overset{4.2.18}{=\!=\!=}0},$$

insbesondere also die Surjektivität der Abbildung β_0, die Existenz einer meromorphen Funktion F auf X mit einer doppelten Polstelle in p, welche sonst überall holomorph ist.
Ferner gilt nach Definition vom Geschlecht und der Anwendung der Serre-Dualität

$$dim(H^1(X, \Omega)) = g = 1,$$

d.h. es ex. eine holomorphe 1-Form $\omega \in \Omega(X)\backslash\{0\}$.
Da außerdem mit 4.2.18 gilt $deg(\omega) = deg(K_X) = 0$, verschwindet ω also nirgends.
Betrachte nun die meromorphe Differentialform $F \cdot \omega$, welche in $X\backslash\{p\}$ holomorph ist, so liefert der Residuensatz (2.3.14)

$$Res_p(F \cdot \omega) = 0$$

Sei nun z eine beliebige lokale Koordinate um p, so erhält man nach der Multiplikation mit einer Konstanten und der Addition einer Konstanten durch die Reihenentwicklung von F folgendes:

$$F(z) = \tfrac{1}{z^2} + [1].$$

Betrachte nun die meromorphe Funktion $\frac{dF}{\omega}$ auf X. Da ω nirgends verschwindet, ist $\frac{dF}{\omega}$ holomorph auf $X\backslash\{0\}$ und hat eine Polstelle der Ordnung 3 in p, folglich bilden $\frac{dF}{\omega}, F$ und die Konstanten $c \in \mathbb{C}$ eine Basis von $H^0(X, \mathscr{O}_{D_{3p}})$.
Setze also

$$F' = \lambda \tfrac{dF}{\omega} + \lambda' F + \lambda''.$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten $\lambda, \lambda', \lambda''$ erhält man

$$F'(z) = \tfrac{1}{z^3} + [1]$$

in einer Umgebung um p.
Die Abbildung $\iota_H : X \to \mathbb{P}^N$, kann man nun folgendermaßen ausdrücken

$$q \mapsto [1, F(q), F'(q)].$$

Mittels Reihenentwicklung im Punkt p erhält man also:

$$(F'(z))^2 = \tfrac{1}{z^6} + \tfrac{c}{z^2} + [-1],$$

sowie

$$F(z)^3 = \tfrac{1}{z^6} + \tfrac{c'}{z^3} + \tfrac{c''}{z^2} + [-1].$$

Zusammenfassend ist die meromorphe Funktion

$$(F'(z))^2 + c'F'(z) - F(z)^3 + (c'' - c)F(z),$$

holomorph außerhalb von p, mit höchstens einfacher Polstelle in p , also Konstant. Das Bild von X unter der Einbettung ι_H ist dementsprechend die Ortslinie des Polynoms

$$y^2 + c'y = x^3 + ax + b,$$

wobei $x = Z_1/Z_0, y = Z_2/Z_0$ die euklidischen Koordinaten von $\mathbb{P}^2$ sind.
Nach linearer Transformation der Koordinate y, erhält man das Polynom der Form

$$(*) := y^2 = x^3 + ax + b,$$

und letztens Endes, nach linearer Transformation in x, sodass eine Nullstelle sich im Punkt 0 und eine weitere im Punkt 1 befindet, kann also jede Kurve vom Geschlecht 1 als Nullstellenmenge eines kubischen Polynoms in $\mathbb{P}^2$ der Form

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$$

aufgefasst werden.

q.e.d.

Ausblick 5.4.2. Man sieht also, dass die Einbettung einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht 1 im obigen Polynom $(*)$ durch einen Parameter λ festgelegt wird. Da der komplexe Torus durch ein Gitter der Form $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ eine Basis der komplexen Zahlen bilden, festgelegt ist und auch der Parameter bis auf Automorphie über $\mathbb{C}$ ein solches Gitter bestimmt, würde man also erwarten, dass alle Kurven vom Geschlecht 1 als Tori realisiert werden können. Der sogenannte Residuensatz liefert unter anderem diese Erkenntnis.

Literatur

[01] Forster, Otto (1977): Riemannsche Flächen, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag

[02] Griffiths, Phillip und Harris, Joseph (1978): Principles of algebraic geometry, United States: John Wiley & Sons

[03] https://www.math.ucla.edu/~manion/UndergradThesis.pdf, letzter Abruf am 14.08.2018.

[04] Zuo, Kang (2018): Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen, Mainz

[05] Hog-Angeloni, Cynthia; de Jong, Theo; van Straten, Duco (2017): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Topologie, Mainz

[06] Miraglia, Francisco (2006): An Introduction to Partially Ordered Structures and Sheaves, Mailand: Polimetrica

[07] Remmert, Reinhold (2002), Georg Schumacher: Funktionentheorie 1. 5. Auflage, Heidelberg: Springer-Verlag

[08] Jänich, Klaus (1980): Einführung in die Funktionentheorie. 2. Auflage, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag

[10] Yumpu (2018): Satz von Riemann Roch und Serre-Dualität, https://www.yumpu.com/de/document/view/16894766/satz-von-riemann-roch-und-serre-dualitat, letzter Abruf am 18.08.2018

[10] Wikipedia (2018): Garbe, https://de.wikipedia.org/wiki/Garbe_(Mathematik), letzter Abruf am 15.7.2018.

[11] Wikipedia (2018): Holomorphe Funktion, https://de.wikipedia.org/wiki/Holomorphe_Funktion, letzter Abruf am 15.7.2018.

[12] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre (1953): Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. R. Acad. Sci. Paris 237 , 128-130