



Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik

## Masterarbeit (korrigierte Version)

Im Vergleich zur Abgabeverision vom 15.07.2012, eingereicht am 16.07.2012,  
wurden x kleine Fehler vom Autor korrigiert.

Aussagen, die sich kürzer beweisen lassen, Formeln, die vereinfacht dargestellt werden können,  
oder mittlerweile gezeigte Folgerungen aus der Masterarbeit sind *nicht* in dieser korrigierten  
Version modifiziert worden bzw. enthalten.

---

# Über eine diskrete Familie von Integraloperatoren

---

von  
Christoph Uebersohn

betreut von  
Herrn Prof. Dr. Vadim Kostrykin  
Staudingerweg 9, Raum 04-627  
55099 Mainz

Wiesbaden, den 10. Februar 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Notation . . . . .	1
1.2 Faltung und Fourier-Transformation . . . . .	3
1.3 Funktionalanalysis . . . . .	4
1.4 Distributionen . . . . .	10
1.5 Drei Sätze aus der Funktionentheorie . . . . .	13
1.6 Unendliche Produkte . . . . .	14
<b>2 Hankel-Operatoren</b>	<b>17</b>
<b>3 Über die Hilbertsche Matrix</b>	<b>27</b>
3.1 Titchmarsh-Kodaira Theorie . . . . .	27
3.2 Über die Whittaker-Funktionen M und W . . . . .	30
3.3 Über einen Differentialausdruck zweiter Ordnung . . . . .	40
3.4 Über die Hilbertsche Matrix . . . . .	50
<b>4 Über eine diskrete Familie von Integraloperatoren</b>	<b>57</b>
4.1 Eigenschaften der Funktionen $k^{(\ell)}$ für $\ell \in \mathbb{N}$ . . . . .	67
4.2 Explizite Bestimmung der Funktionen $k^{(\ell)}$ für $\ell \in \mathbb{N}$ . . . . .	77
<b>Anhang</b>	<b>93</b>
1 Eine Orthonormalbasis von $L^2(0, \infty)$ . . . . .	93
2 Harmonische Analysis . . . . .	95
3 Über die Multiplizität für das stetige Spektrum eines selbstadjungierten Operators	96
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>



# Einleitung

Gegenstand dieser Masterarbeit ist die Untersuchung einer diskreten Familie von Integraloperatoren  $K^{(\ell)} : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , deren Kerne  $(0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto k^{(\ell)}(x + y)$ , wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} k^{(0)}(x) &:= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}, \\ k^{(\ell)}(x) &:= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{d^n}{dx^n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{\sin(w)}{w} \right) \right) (x), \end{aligned} \quad (\text{I})$$

sogar auf ganz  $\mathbb{R}$ , wobei  $\sin(0)/0 := 1$ ,  $p_\ell(w) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} w^{\ell-j-1}$ ,  $w \in \mathbb{R}$  und  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Der Operator  $K^{(0)}$  ist gleich dem bei Mark Krein [12] und Kostyrykin und Makarov [11] untersuchten Hankel-Operator  $K$ , der wiederum zurückgeht auf den eindimensionalen Laplace-Operator  $-d^2/dx^2$ . Betrachtet man  $\Delta_D$ , den Laplace-Operator mit Dirichletschen Randbedingungen auf  $(0, \infty)$ , und  $\Delta_N$ , den Laplace-Operator mit von Neumannschen Randbedingungen auf  $(0, \infty)$ , so kann jeweils die Resolvente  $A_0 := (\Delta_D + 1)^{-1}$  und  $A_1 := (\Delta_N + 1)^{-1}$  im Punkt  $-1$  bestimmt werden, s. Krein [12], S. 623. Die Operatoren  $A_0$  und  $A_1$  sind beschränkte Integraloperatoren auf  $L^2(0, \infty)$ , deren Integralkerne gegeben sind durch

$$a_0(x, y) = \begin{cases} \sinh(x)e^{-y}, & \text{falls } x \leq y, \\ \sinh(y)e^{-x}, & \text{falls } x \geq y, \end{cases}$$

bzw.

$$a_1(x, y) = \begin{cases} \cosh(x)e^{-y}, & \text{falls } x \leq y, \\ \cosh(y)e^{-x}, & \text{falls } x \geq y. \end{cases}$$

Krein [12] hat auf Seite 623 gezeigt, dass für  $0 < \mu < 1$  die Differenz der Spektralmaße von  $A_1$  und  $A_0$  durch den Integraloperator

$$K_\mu := E_{(-\infty, \mu)}(A_1) - E_{(-\infty, \mu)}(A_0)$$

auf  $L^2(0, \infty)$  mit Kern  $k_\mu(x + y)$  gegeben ist, wobei

$$k_\mu(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\sqrt{\lambda(\mu)}x)}{x} \quad \text{mit } \lambda(\mu) = \frac{1}{\mu} - 1.$$

Davon ausgehend haben Kostyrykin und Makarov [11] das folgende Resultat bewiesen:

**0.1 Satz:** *Für jedes  $0 < \mu < 1$  ist das Spektrum  $\sigma(K_\mu) = [-1, 1]$  von  $K_\mu$  rein absolutstetig. Jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt die Multiplizität eins.*

Wir skizzieren den Beweis, der im Folgenden eine wichtige Rolle spielen wird. Man rechnet leicht nach, dass

$$k^{(0)}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{II})$$

wobei  $\psi(t) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ . Daher ist  $K^{(0)}$  unitär äquivalent zum Hankel-Operator  $S_\psi$  auf dem Hardy-Raum  $H^2(\mathbb{R})$  mit Symbol  $\psi$ . Definiere die Funktion  $\phi$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq -1\}$  durch  $\phi(z) = \psi\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)$ . Dann ist der Hankel-Operator  $S_{z\phi}$  auf dem Hardy-Raum  $H^2$  unitär äquivalent zu  $S_\psi$ . Indem wir  $S_{z\phi}$  vermöge  $S_{z\phi} = PJM_{z\phi}|_{H^2}$  auf dem Folgenraum  $\ell_+^2$  betrachten<sup>1</sup>, lässt sich leicht zeigen, dass  $S_{z\phi}$  (bis auf konstante Faktoren) unitär äquivalent zur direkten Summe zweier verallgemeinerter Hilbertscher Matrizen ist, welche jeweils mit Hilfe von Marvin Rosenblums Ergebnissen aus [20] diagonalisiert werden können. Damit folgt schließlich die Behauptung.

Wie wir in Kapitel vier sehen werden, ist erheblich mehr Arbeit als im Fall (II) erforderlich, um zu zeigen, dass für die oben definierten Funktionen  $k^{(\ell)}$

$$k^{(\ell)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (\text{III})$$

gilt, wobei  $\psi_\ell(t) = \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^\ell \psi(t)$ . Danach betrachten wir den Hankel-Operator  $S_{z^{\ell+1}\phi}$  vermöge  $S_{z^{\ell+1}\phi} = PJM_{z^{\ell+1}\phi}|_{H^2}$  auf dem Folgenraum  $\ell_+^2$ . Um zu zeigen, dass  $S_{z^{\ell+1}\phi}$  (bis auf konstante Faktoren) unitär äquivalent zur direkten Summe zweier verallgemeinerter Hilbertscher Matrizen ist, unterscheiden wir die Fälle gerader und ungerader  $\ell$ . Zusammen mit Rosenblums Ergebnissen aus [20] erhalten wir eines der zentralen Resultate dieser Masterarbeit, das zudem neu ist:

**0.2 Satz:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Definiere die Funktionen  $\rho_p : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  und  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  für  $\lambda > 0$  durch*

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right) \right|^2$$

bzw.

$$h(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})};$$

$\Gamma$  bezeichne die Gammafunktion. Für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  ist

(i)  $K^{(2m)}$  unitär äquivalent zu

$$M_{\frac{(-1)^m}{\pi}}{}_h \oplus M_{\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}}{}_h \text{ auf } L^2\left((0, \infty); \rho_{\frac{1}{2}-m}(\lambda) d\lambda\right) \oplus L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda) d\lambda\right).$$

Das Spektrum  $\sigma(K^{(2m)}) = [-1, 1]$  von  $K^{(2m)}$  ist rein absolutstetig, und jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt Multiplizität eins.

(ii)  $K^{(2m+1)}$  unitär äquivalent zu

$$M_{\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}}{}_h \oplus M_{\frac{(-1)^m}{\pi}}{}_h \text{ auf } L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda) d\lambda\right) \oplus L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda) d\lambda\right).$$

Das Spektrum  $\sigma(K^{(2m+1)}) = [-1, 1]$  von  $K^{(2m+1)}$  ist rein absolutstetig, und jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt Multiplizität eins.

Als weiteres zentrales Ergebnis dieser Arbeit darf der Beweis von (III), s. Lemma 4.2, Satz 4.3 und Folgerung 4.6, zusammen mit dem Satz 4.17 und der Folgerung 4.18 über die Eigenschaften der Funktionen  $k^{(\ell)}$  für  $\ell \in \mathbb{N}$  betrachtet werden.

**0.3 Satz:** *Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:*

<sup>1</sup>Dabei bezeichne  $P$  die Orthogonalprojektion von  $L^2(\mathbb{S}^1)$  auf  $H^2 \subset L^2(\mathbb{S}^1)$ ,  $J$  den Flip-Operator und  $M$  den Multiplikationsoperator, s. Kapitel zwei.

---

(i)  $k^{(\ell)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  für jedes  $p \in (1, \infty)$ . Jede Ableitung beliebiger Ordnung von  $k^{(\ell)}$  ist in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Insbesondere existiert  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k^{(\ell)}(x)$  in  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $k^{(\ell)} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

(iii)  $k^{(\ell)} = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $|x| \rightarrow \infty$ , d. h.  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x \cdot k^{(\ell)}(x)| \leq C < \infty$  für eine Konstante  $C > 0$ .

(iv)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2)| = 0$ .

Wir können die Darstellung (I) der Funktionen  $k^{(\ell)}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , offensichtlich umschreiben zu

$$k^{(\ell)}(x) = \frac{1}{2^\ell} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{d^n}{dx^n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * k^{(0)} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dennoch war nicht zu erwarten, dass die Eigenschaften der Funktionen  $k^{(\ell)}$  aus Satz 0.3 in völliger Analogie zu denen der elementaren Funktion  $k^{(0)}$  stehen würden.

Abschließend möchte ich bemerken, dass es möglich ist, die Funktionen  $k^{(\ell)}$  für  $\ell \in \mathbb{N}$  explizit zu berechnen, d. h. eine Darstellung ohne Faltung oder Integral zu finden, s. Satz 4.28; zum Ergebnis sei hier nur erwähnt, dass für die Darstellung der expliziten Formel für  $k^{(\ell)}$  die sogenannte exponentielle Integralfunktion  $E_1$  benötigt wird.



# 1 Grundlagen

## 1.1 Notation

Es seien  $\mathcal{J}$  eine nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und  $f, g : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei  $x_0 \in \bar{\mathcal{J}}$ , falls  $\mathcal{J}$  beschränkt ist, bzw.  $x_0 \in \bar{\mathcal{J}} \cup \{-\infty\}$ , falls  $\mathcal{J}$  nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt ist, bzw.  $x_0 \in \bar{\mathcal{J}} \cup \{\infty\}$ , falls  $\mathcal{J}$  nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt ist, bzw.  $x_0 \in \bar{\mathcal{J}} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ , falls  $\mathcal{J}$  nach oben und nach unten unbeschränkt ist. In der folgenden alphabetisch geordneten Liste wird die Notation für gewisse Räume, Operatoren und Relationen festgelegt, die in der vorliegenden Arbeit verwendet wird.

$\mathbb{1}_\Omega$  : Die charakteristische Funktion zur Menge  $\Omega$ ;  $\mathbb{1}_\Omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \in \Omega \\ 0, & \text{wenn } t \notin \Omega \end{cases}$ .

$\arg(z)$  : Der Winkel  $\theta \in (-\pi, \pi]$  der komplexen Zahl  $z$ ;  $z = |z|e^{i\theta}$ .

Asymptotisch gleich :  $f \sim g, x \rightarrow x_0$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

Betrag einer komplexen Zahl :  $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ .

Binomialkoeffizient :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$  : Die Sigma-Algebra der Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{C}$  : Die Menge der komplexen Zahlen.

$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ .

$\mathbb{C}^{(-)} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ .

$\mathcal{C}^k(\mathcal{J})$  : Die Menge aller Funktionen auf  $\mathcal{J}$ , die  $k$ -mal stetig differenzierbar sind.

$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{J})$  : Die Menge aller Funktionen auf  $\mathcal{J}$ , die beliebig oft differenzierbar sind. Ist  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{J})$ , so schreiben wir  $h^{(n)}$  für die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $h$ .

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

$\mathcal{D}(\Omega)$  : Die Menge aller Testfunktionen auf  $\Omega$ .

$\mathcal{D}'(\Omega)$  : Die Menge aller Distributionen auf  $\Omega$ .

$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } m = n \\ 0, & \text{wenn } m \neq n \end{cases}$  : Das Kronecker-Delta.

$E_1$  : Die exponentielle Integralfunktion.

Ein : Die komplementäre exponentielle Integralfunktion.

$\mathcal{F}$  : Die Fourier-Transformation.

${}_1F_1$  : Konfluente hypergeometrische Funktion.

Fakultät :  $n! = \prod_{j=1}^n j.$

Faltung :  $f_1 * f_2; (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy.$

$H_1 \oplus H_2$  : Die direkte Summe der Hilberträume  $H_1$  und  $H_2$ .

$H^2(\mathbb{D}), H^2, H^2(U), H^2(\mathbb{R})$  : Hardy-Räume.

Heaviside : Die Heaviside-Funktion;  $\text{Heaviside}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$

$\mathbb{H}_\ell = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$  : Die linke Halbebene.

$\mathbb{H}_r = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$  : Die rechte Halbebene.

$I : H \rightarrow H, I(x) = x$  : Der Identitätsoperator.

$\ell^2 = \{(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty\}.$

$\ell_+^2 = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0, \sum_{j \in \mathbb{N}_0} |x_j|^2 < \infty\}.$

$\mathfrak{L}_n$  : Das  $n$ -te Laguerre-Polynom.

$L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$  : Kurzschreibweise für  $L^p(\Omega; \text{Lebesgue-Ma\ss})$ .

$L^p(\Omega; \mu), 1 \leq p < \infty$  : Die Menge (aller Äquivalenzklassen von) messbaren  $p$ -integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  bzgl. des Ma\sses  $\mu$ .

$L^\infty(\Omega; \mu)$  : Die Menge (aller Äquivalenzklassen von) messbaren wesentlich beschränkten Funktionen auf  $\Omega$  bzgl. des Ma\sses  $\mu$ .

$M_{\kappa, \mu}, W_{\kappa, \mu}$  : Die Whittaker-Funktionen.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  : Die Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  : Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null.

$-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, -3, \dots\}.$

$\mathcal{O}(f) = g, x \rightarrow x_0 : \limsup_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \text{konst} < \infty.$

Pochhammer-Symbol :  $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ ; hier bezeichne  $\Gamma$  die Gammafunktion.

$\mathbb{R}$  : Die Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}.$

$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$

$\text{sign}(x) = \text{Heaviside}(x) - \text{Heaviside}(-x)$  : Das Vorzeichen der reellen Zahl  $x$ .

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$  : Die Menge aller Schwartz-Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  : Die Menge aller temperierten Distributionen auf  $\mathbb{R}$ .

$\sigma(T)$  : Das Spektrum des Operators  $T$ .

$\text{spt}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{J} : f(x) \neq 0\}}$  : Der Träger der Funktion  $f$ .

$T_1 \oplus T_2$  : Der Operator  $\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} : H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_1 \oplus H_2.$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  : Die Menge der ganzen Zahlen.

## 1.2 Faltung und Fourier-Transformation

Ist  $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$  für ein  $p \in [1, \infty]$  und  $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ , so definieren wir die Faltung von  $f_1$  und  $g_1$  durch

$$(f_1 * g_1)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x)g_1(x)dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ist  $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$  oder  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , so ist die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}f_2$  von  $f_2$  definiert durch

$$(\mathcal{F}f_2)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-ixw}dx, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Es gilt  $|(\mathcal{F}f_2)(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty$  für jedes reelle  $w$ . Wir schreiben manchmal  $\hat{f}_2$  anstelle von  $\mathcal{F}f_2$ .

**1.1 Satz:** Ist  $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$  für ein  $p \in [1, \infty]$  und  $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ , so ist die Faltung  $f_1 * g_1$  von  $f_1$  und  $g_1$  fast überall durch das obige Integral definiert und in  $L^p(\mathbb{R})$ . Es gilt

$$\|f_1 * g_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Die Fourier-Transformation auf  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  kann zu einer unitären Abbildung  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  fortgesetzt werden, die ebenfalls mit  $\mathcal{F}$  bezeichnet wird. Sind  $f_2, g_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , so gilt

$$(i) \quad (\mathcal{F}\{f_2 * g_2\})(w) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f_2)(w) \cdot (\mathcal{F}g_2)(w), \quad w \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad (\mathcal{F}\{f_2 \cdot g_2\})(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ((\mathcal{F}f_2) * (\mathcal{F}g_2))(w), \quad w \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Zum Beweis der Behauptungen zur Faltung sei auf Theorem 1.1 und Theorem 1.2 bei Lang [13], S. 224-225, verwiesen. Die Wohldefiniertheit der Fourier-Transformation auf  $L^2$  wird bei Evans [3], S. 183-184, diskutiert. Dass  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  unitär ist, wird bei Evans [3], Theorem 2 (i), S. 184-185, bewiesen. Einen Beweis für (i) findet man bei Evans [3], Theorem 2, S. 184-185. (ii) kann analog zu (i) bewiesen werden, nämlich durch die Anwendung des Satzes von Fubini.  $\square$

Es gilt das folgende

**1.2 Lemma:** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  derart, dass für ein  $\nu \in \mathbb{N}$  und jedes  $\alpha \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha \leq \nu$  sogar  $t^\alpha f(t)$  über  $\mathbb{R}$  integrierbar ist. Dann existieren die Ableitungen der Ordnung  $\alpha$  von  $\hat{f}$ , und es gilt

$$\hat{f}^{(\alpha)} = (-i)^\alpha \widehat{t^\alpha f}, \quad \widehat{t^\alpha f} = i^\alpha \hat{f}^{(\alpha)}.$$

**Beweis:** Ein Beweis dieses Lemmas findet sich z. B. bei Königsberger [10], S. 329.  $\square$

Des Weiteren benötigen wir

**1.3 Lemma** (Differentiationssatz der Faltung): Es sei  $g \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , eine beschränkte Funktion, deren Ableitungen  $g^{(\alpha)}$  für alle  $\alpha \in \{0, 1, \dots, j\}$  ebenfalls beschränkt sind. Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann ist  $f * g \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$ , und für jedes  $\alpha \in \{0, 1, \dots, j\}$  gilt

$$(f * g)^{(\alpha)} = f * g^{(\alpha)}.$$

**Beweis:** Der Beweis ist eine iterierte Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz, siehe z. B. Königsberger [10], S. 319.  $\square$

## 1.3 Funktionalanalysis

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Darstellungssatz für Sesquilinearformen.

**1.4 Satz:** *Es sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  und Norm  $\| \cdot \| : H \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sei antilinear in der zweiten Komponente. Es sei  $B[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform, die antilinear in der zweiten Komponente ist.  $B[\cdot, \cdot]$  sei beschränkt, d. h. es existiert eine Konstante  $M \geq 0$ , so dass  $|B[x, y]| \leq M\|x\|\|y\|$  für alle  $x, y \in H$ . Dann existiert genau ein beschränkter linearer Operator  $T : H \rightarrow H$  derart, dass*

$$B[x, y] = \langle x, T(y) \rangle$$

für alle  $x, y \in H$ .

**Beweis:** Wir folgen der Beweisstrategie aus Evans [3], S. 298. Für den Rest des Beweises sei  $M \geq 0$  eine Konstante, so dass die Sesquilinearform  $B[\cdot, \cdot]$  bzgl.  $M$  beschränkt ist. Es sei  $g \in H$ . Dann gilt nach Voraussetzung, dass die Linearform  $B[\cdot, g] : H \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt ist mit Konstante  $\|g\|M$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert genau ein  $y \in H$ , das von  $g$  abhängt, so dass  $B[x, g] = \langle x, y \rangle$  für alle  $x \in H$ . Die Abbildung  $g \mapsto y$  bezeichnen wir mit  $T$ . Es seien  $g_1, g_2 \in H$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $g := g_1 + \alpha g_2 \in H$ , und es gilt

$$\langle x, T(g) \rangle = B[x, g] = B[x, g_1] + \bar{\alpha}B[x, g_2] = \langle x, T(g_1) \rangle + \bar{\alpha}\langle x, T(g_2) \rangle = \langle x, T(g_1) + \alpha T(g_2) \rangle$$

für alle  $x \in H$ , wobei erneut der Riesz'sche Darstellungssatz verwendet wurde. Die Abbildung  $T : H \rightarrow H$  ist also linear. Um die Beschränktheit von  $T$  zu zeigen, sei  $g \in H$  nicht im Kern von  $T$ , denn für  $T(g) = 0$  wäre  $|T(g)| = 0 \leq \text{konst}\|g\|$  für jede nichtnegative Konstante. Dann folgt aus der Beschränktheit von  $B[\cdot, \cdot]$  und dem Riesz'schen Darstellungssatz, dass

$$\|T(g)\|^2 = \langle T(g), T(g) \rangle = B[T(g), g] \leq M\|g\|\|T(g)\|,$$

und da  $g$  nicht im Kern von  $T$  ist, sehen wir nach Division durch  $\|T(g)\|$ , dass der Operator  $T$  beschränkt ist mit Konstante  $M$ .  $\square$

Es folgt eine kurze Zusammenstellung von Resultaten aus der Spektraltheorie für selbstadjungierte Operatoren, die im Verlauf der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Wir folgen größtenteils der Darstellung und der Notation aus Werner [25], Kapitel VII. Den Raum aller beschränkten Operatoren  $H \rightarrow H$  bezeichnen wir mit  $L(H)$ , wobei  $H$  ein Hilbertraum sei. Die identische Funktion  $t \mapsto t$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{t}$  und die Funktion  $t \mapsto 1$  mit  $\mathbf{1}$ .

**1.5 Satz (Stetiger Funktionalkalkül):** *Es sei  $T$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem komplexen Hilbertraum  $H$ . Dann existiert genau eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$  mit*

(i)  $\Phi(\mathbf{t}) = T, \Phi(\mathbf{1}) = I$ .

(ii)  $\Phi$  ist ein involuter Algebrenhomomorphismus, d. h.

- $\Phi$  ist linear,
- $\Phi$  ist multiplikativ:  $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$ ,
- $\Phi$  ist involutiv:  $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$ .

(iii)  $\Phi$  ist stetig.

$\Phi$  heißt der stetige Funktionalkalkül von  $T$ . Ist  $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ , so schreiben wir  $f(T)$  anstelle von  $\Phi(f)$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Werner [25], Satz VII.1.3, S. 319-321, verwiesen. Da  $\sigma(T)$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, können wir nach dem Satz von Weierstraß jede stetige Funktion auf  $\sigma(T)$  gleichmäßig durch Polynome approximieren. Für ein Polynom  $p$  mit  $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  ist  $p(T)$  definiert durch  $\sum_{k=0}^n a_k T^k$ .  $\square$

Ist  $\Omega$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , so schreiben wir  $B(\Omega)$  für den Vektorraum der beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf  $\Omega$ .

**1.6 Satz** (Messbarer Funktionalkalkül): *Es seien  $H$  ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\hat{\Phi} : B(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$  mit:*

(i)  $\hat{\Phi}(t) = T, \hat{\Phi}(1) = I.$

(ii)  $\hat{\Phi}$  ist ein involuter Algebrenhomomorphismus.

(iii)  $\hat{\Phi}$  ist stetig.

(iv) Sind  $f_1, f_2, \dots$  aus  $B(\sigma(T))$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(\sigma(T))} < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  für alle  $t \in \sigma(T)$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \hat{\Phi}(f_n)x, y \rangle = \langle \hat{\Phi}(f)x, y \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .

$\hat{\Phi}$  heißt der messbare Funktionalkalkül von  $T$ . Ist  $f \in B(\sigma(T))$ , so schreiben wir  $f(T)$  anstelle von  $\hat{\Phi}(f)$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Werner [25], Satz VII.1.6, S. 324-326.  $\square$

**1.7 Definition.** Es sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum. Es sei  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  die Borelsche Sigma-Algebra auf  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H), \Omega \mapsto E_\Omega$ , heißt *Spektralmaß*, falls alle  $E_\Omega$  Orthogonalprojektionen sind und

(i)  $E_\emptyset = 0, E_{\mathbb{R}} = I.$

(ii) für paarweise disjunkte  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  aus  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_{\Omega_k}(x) = E_{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k}(x)$$

für alle  $x \in H$ .

Ein Spektralmaß  $E$  hat *kompakten Träger*, falls eine kompakte Menge  $A$  mit  $E_A = I$  existiert.

**1.8 Satz:** *Es seien  $H$  ein komplexer Hilbertraum und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert, d. h.  $T^* = T$ . Dann ist die durch  $E_\Omega := \mathbb{1}_{\Omega \cap \sigma(T)}(T)$  definierte Abbildung  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$  ein Spektralmaß mit kompaktem Träger. Es gilt  $E_{\sigma(T)} = I$ .*

**Beweis:** Dies folgt aus Lemma VII.1.7 und Lemma VII.1.8 bei Werner [25], S. 326-327.  $\square$

Wir möchten eine beschränkte Borel-messbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bzgl. eines Spektralmaßes  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$  integrieren. Dies führt zu

**1.9 Satz:** Es sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum. Für ein Spektralmaß  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$  und eine beschränkte Borel-messbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  existiert  $\int f(\lambda)dE_\lambda \in L(H)$ . Die Abbildung  $f \mapsto \int f(\lambda)dE_\lambda$  ist linear und stetig, genauer gilt  $\|\int f(\lambda)dE_\lambda\| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Ist  $f$  reellwertig, so ist  $\int f(\lambda)dE_\lambda$  selbstadjungiert. Falls eine kompakte Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  existiert derart, dass  $E_A = I$ , so genügt es, dass  $f$  auf  $A$  definiert und beschränkt ist.

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Werner [25], Satz VII.1.11, S. 327-328, verwiesen.  $\square$

**1.10 Satz** (Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren): Es seien  $H$  ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $T \in L(H)$  selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$  mit kompaktem Träger, so dass

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda. \quad (1.1)$$

Die Abbildung  $B(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ ,  $f \mapsto f(T) = \int f(\lambda)dE_\lambda$ , definiert den messbaren Funktionalkalkül. Der Operator  $f(T)$  ist bestimmt durch

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, y \rangle.$$

Dabei steht  $d\langle E_\lambda x, y \rangle$  für Integration bzgl. des komplexen Maßes  $\Omega \mapsto \langle E_\Omega x, y \rangle$ ,  $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei Werner [25] auf den Seiten 327 bis 330; der Satz wird dort als Theorem VII.1.13 auf S. 331 formuliert.  $\square$

Das folgende Lemma samt Beweis habe ich ohne Vorlage aus irgendeiner Veröffentlichung formuliert.

**1.11 Lemma:** Es sei  $\Omega$  ein offenes oder abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$ , das nicht leer ist. Betrachte den Hilbertraum  $L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda)$ , wobei die Funktion  $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und stetig in  $\Omega$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Dann ist das Maß einer Borel-Menge  $A \subset \Omega$  genau dann gleich Null bzgl.  $\rho(t)dt$ , wenn das Lebesgue-Maß von  $A$  verschwindet. Definiere die Funktion  $\tilde{\rho} : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  durch  $\tilde{\rho}(t) = \rho(t)$ , falls  $\rho(t) \neq 0$ , und  $\tilde{\rho}(t) = 1$ , falls  $\rho(t) = 0$ . Dann ist  $\tilde{\rho}$  stetig in  $\Omega$  bis auf höchstens endlich viele Punkte, und jede Borel-Menge  $A \subset \Omega$  besitzt bzgl.  $\rho(t)dt$  das gleiche Maß wie bzgl.  $\tilde{\rho}(t)dt$ .

**Beweis:** Unter den Voraussetzungen des Lemmas existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  derart, dass wir  $\Omega$  als Vereinigung von endlich vielen nichtleeren Intervallen  $\mathfrak{J}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , schreiben können, so dass  $\mathfrak{J}_k \cap \mathfrak{J}_\ell$  aus maximal einem Punkt besteht, wobei  $k \neq \ell$ , und die Funktion  $\rho$  eingeschränkt auf jedes  $\mathfrak{J}_k$  stetig ist. Offensichtlich gilt  $\int_A \rho(t)dt = 0$ , falls  $A \subset \Omega$  eine Lebesgue-Nullmenge ist. Ist andererseits  $A \subset \Omega$  eine Borel-Menge mit

$$0 = \int_A \rho(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{A \cap \mathfrak{J}_k} \rho|_{\mathfrak{J}_k}(t)dt,$$

so gilt  $\int_{A \cap \mathfrak{J}_k} \rho|_{\mathfrak{J}_k}(t)dt = 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Es seien  $N \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der Nullstellen von  $\rho$  in  $\Omega$  und  $3\delta = \min\{|t - t'| : t \neq t' \text{ sind Nullstellen von } \rho\} > 0$  bzw.  $\delta := 1$ , falls  $N \in \{0, 1\}$ . Angenommen, es gibt ein  $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ , so dass das Lebesgue-Maß von  $A \cap \mathfrak{J}_{k_0}$  gleich  $(2N+2)\varepsilon > 0$  ist. Sei  $K \subset A \cap \mathfrak{J}_{k_0}$  eine kompakte Menge mit Lebesgue-Maß  $(2N+1)\varepsilon > 0$ . Falls  $\rho$  keine Nullstelle in  $K$  hat, so folgt, dass

$$\int_{A \cap \mathfrak{J}_{k_0}} \rho|_{\mathfrak{J}_{k_0}}(t)dt \geq \int_K \rho|_{\mathfrak{J}_{k_0}}(t)dt \geq (2N+1)\varepsilon \min_{t \in K} \rho|_{\mathfrak{J}_{k_0}}(t) > 0,$$

ein Widerspruch. Falls eine Nullstelle  $t_1 \in K$  von  $\rho$  in  $K$  existiert, so definieren wir die Menge  $\tilde{K}$  durch

$$\tilde{K} := K \setminus \bigcup_{j=1}^N \{x \in \Omega : |x - t_j| < \min(\delta, \varepsilon)\},$$

wobei  $t_1, \dots, t_N$  die Nullstellen von  $\rho$  in  $\Omega$  sind. Dann besitzt  $\tilde{K}$  mindestens das Lebesgue-Maß  $\varepsilon > 0$ , und es gilt

$$\int_{A \cap \mathcal{I}_{k_0}} \rho|_{\mathcal{I}_{k_0}}(t) dt \geq \int_{\tilde{K}} \rho|_{\mathcal{I}_{k_0}}(t) dt \geq \varepsilon \min_{t \in \tilde{K}} \rho|_{\mathcal{I}_{k_0}}(t) > 0,$$

ein Widerspruch. Daher ist  $A$  eine Lebesgue-Nullmenge. Die restlichen Behauptungen im Lemma sind offensichtlich wahr.  $\square$

**1.12 Satz:** *Es sei  $\Omega$  ein offenes oder abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$ , das nicht leer ist. Es sei  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige beschränkte Funktion. Betrachte den Hilbertraum  $L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda)$ , wobei die Funktion  $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und stetig in  $\Omega$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Dann ist der Multiplikationsoperator  $M_h : L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda) \rightarrow L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda)$  beschränkt und selbstadjungiert. Das Spektrum von  $M_h$  ist gegeben durch*

$$\sigma(M_h) = \{y \in \mathbb{R} : \int_{h^{-1}(]y-\varepsilon, y+\varepsilon])} \rho(\lambda)d\lambda > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0\} = \overline{\{h(t) : t \in \Omega\}}.$$

Ein Punkt  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann ein Eigenwert von  $M_h$ , wenn  $h^{-1}(\{\lambda\})$  bzgl.  $\rho(t)dt$  positives Maß besitzt.

**Beweis:** Aus der Beschränktheit von  $h$  folgt die Beschränktheit des Operators  $M_h$ . Da  $h$  reellwertig ist, ist  $M_h$  selbstadjungiert.

Nach Lemma 1.11 ist das Maß einer Borel-Menge  $A \subset \Omega$  genau dann gleich Null bzgl.  $\rho(t)dt$ , wenn das Lebesgue-Maß von  $A$  verschwindet. Für jedes  $y \in \mathbb{R}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $h^{-1}(]y - \varepsilon, y + \varepsilon])$  als Urbild der offenen Menge  $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$  unter der stetigen Funktion  $h$  offen. Daher besitzt  $h^{-1}(]y - \varepsilon, y + \varepsilon])$  genau dann Maß null bzgl.  $\rho(t)dt$ , wenn das Lebesgue-Maß der offenen Menge  $h^{-1}(]y - \varepsilon, y + \varepsilon])$  gleich Null ist, also genau dann, wenn  $h^{-1}(]y - \varepsilon, y + \varepsilon])$  die leere Menge ist. Da  $h$  stetig und beschränkt ist, folgt mit den obigen Eigenschaften von  $\Omega$ , dass

$$\{y \in \mathbb{R} : \int_{h^{-1}(]y-\varepsilon, y+\varepsilon])} \rho(t)dt > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0\} = \overline{\{h(t) : t \in \Omega\}}.$$

Es sei  $\lambda \notin \overline{\{h(t) : t \in \Omega\}}$ . Dann ist die Funktion  $t \mapsto 1/(h(t) - \lambda)$  stetig und beschränkt auf  $\Omega$ , also ist der zu  $M_h - \lambda$  inverse Operator  $M_{1/(h-\lambda)}$  beschränkt und  $\lambda$  gehört zur Resolventenmenge von  $M_h$ .

Sei nun  $\lambda \in \mathbb{R}$  derart, dass  $\int_{h^{-1}(] \lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])} \rho(t)dt > 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $\varepsilon_n = 1/n$  und der Sigma-Endlichkeit des Maßes  $\rho(t)dt$  folgt, dass eine Menge  $\Omega_n \subset \{t \in \Omega : |h(t) - \lambda| < 1/n\}$  existiert, die bzgl.  $\rho(t)dt$  positives, endliches Maß besitzt. Setze  $f_n := \left(\int_{\Omega_n} \rho(t)dt\right)^{-1/2} \mathbf{1}_{\Omega_n}$ . Dann gilt  $\|f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)} = 1$  und

$$\|(M_h - \lambda)f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)}^2 = \int_{\Omega_n} |\{h(t) - \lambda\}f_n(t)|^2 \rho(t)dt \leq \frac{1}{n^2} \int_{\Omega_n} |f_n(t)|^2 \rho(t)dt = \frac{1}{n^2}.$$

Folglich gilt  $\|(M_h - \lambda)f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)} \leq 1/n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und damit  $\lambda \in \sigma(M_h)$ , denn wäre  $\lambda$  in der Resolventenmenge von  $M_h$  und  $R_\lambda = (M_h - \lambda)^{-1}$  die beschränkte Inverse zu  $M_h - \lambda$ , so wäre

$$1 = \|f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)} = \|R_\lambda(M_h - \lambda)f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)} \leq \|R_\lambda\| \|(M_h - \lambda)f_n\|_{L^2(\Omega; \rho(t)dt)} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ , ein Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen, dass ein Punkt  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann ein Eigenwert von  $M_h$  ist, wenn  $h^{-1}(\{\lambda\})$  bzgl.  $\rho(t)dt$  positives Maß besitzt. Sei zunächst  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $M_h$  und  $f \in L^2(\Omega; \rho(t)dt) \setminus \{0\}$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann gilt  $\{h(t) - \lambda\}f(t) = 0$  fast überall bzgl.  $\rho(t)dt$ , also existiert eine Menge  $A \subset \Omega$  von positivem Maß bzgl.  $\rho(t)dt$ , so dass  $h(t) - \lambda = 0$  fast überall in  $A$ . Da  $A \subset h^{-1}(\{\lambda\})$ , gilt  $\int_{h^{-1}(\{\lambda\})} \rho(t)dt > 0$ .

Sei andererseits  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Punkt, so dass  $\int_{h^{-1}(\{\lambda\})} \rho(t)dt > 0$ . Da  $\rho(t)dt$  ein Sigma-endliches Maß ist, existiert eine messbare Menge  $A \subset h^{-1}(\{\lambda\})$  von endlichem positiven Maß bzgl.  $\rho(t)dt$ . Setze  $f := \mathbb{1}_A$ . Dann gilt  $f \in L^2(\Omega; \rho(t)dt) \setminus \{0\}$  und  $(M_h - \lambda)f = h \cdot f - \lambda f = 0$ , also ist  $f$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$  von  $M_h$ .  $\square$

**1.13 Satz:** *Es sei  $(a, b)$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  mit reellen Zahlen  $a < b$ . Es sei  $\rho : (a, b) \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion, die höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und stetig in  $(a, b)$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Dann ist der Multiplikationsoperator  $M_{\mathbf{t}} : L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda) \rightarrow L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)$  beschränkt und selbstadjungiert und besitzt das rein kontinuierliche Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [a, b]$ . Das Spektralmaß  $E$  zu  $M_{\mathbf{t}}$  ist gegeben durch*

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)), \quad E_A f = \mathbb{1}_{A \cap [a, b]} \cdot f,$$

wobei  $f \in L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)$ .

**Beweis:** Dass  $M_{\mathbf{t}}$  beschränkt und selbstadjungiert ist, folgt wie im Beweis des Satzes 1.12. Zudem folgt mit Satz 1.12 unmittelbar, dass das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [a, b]$  von  $M_{\mathbf{t}}$  rein kontinuierlich ist. Um die Behauptung zum Spektralmaß von  $M_{\mathbf{t}}$  zu zeigen, verwenden wir die übliche Beweisidee, s. Werner [25], Beispiel (c), S. 332. Wir definieren die Abbildung  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$  durch  $E_A f = \mathbb{1}_{A \cap [a, b]} \cdot f$ , wobei  $f \in L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)$ . Es ist leicht zu sehen, dass  $E$  ein Spektralmaß ist.  $E$  hat kompakten Träger, denn  $E_{[a, b]} = I$ . Es seien  $f, g \in L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)$  beliebig, aber fest gewählt. Dann gilt

$$\langle E_A f, g \rangle_{L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)} = \int_a^b \mathbb{1}_{A \cap [a, b]}(\lambda) f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \rho(\lambda) d\lambda$$

für jedes  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , also besitzt das komplexe Maß  $d\langle E_{\lambda} f, g \rangle$  die Dichte  $f \cdot \bar{g}$  bzgl. des positiven Maßes  $\rho(\lambda)d\lambda$ ; aus der Hölderschen Ungleichung folgt sofort, dass  $f \cdot \bar{g} \in L^1((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)$ . Folglich gilt

$$\int_a^b \lambda d\langle E_{\lambda} f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \rho(\lambda) d\lambda = \langle M_{\mathbf{t}} f, g \rangle_{L^2((a, b); \rho(\lambda)d\lambda)},$$

d. h.  $E$  stellt  $M_{\mathbf{t}}$  dar, s. (1.1). Nach Satz 1.10 ist  $E$  damit das eindeutig bestimmte Spektralmaß zu  $M_{\mathbf{t}}$ .  $\square$

Bis jetzt haben wir für Hilberträume  $H_1$  und  $H_2$  stets beschränkte Operatoren  $T : H_1 \rightarrow H_2$  betrachtet; der zu  $T$  adjungierte Operator  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  kann als der beschränkte Operator definiert werden, für den  $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}$  für alle  $x \in H_1$  und alle  $y \in H_2$  gilt.

Es sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum. Eine lineare Abbildung  $T$ , die nicht auf ganz  $H$ , sondern auf einem Teilraum  $\text{dom}(T)$  von  $H$  definiert ist, bezeichnen wir als *Operator*.  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  heißt *dicht definiert in  $H$* , falls  $\text{dom}(T)$  dicht in  $H$  liegt. Für den Rest dieses Abschnitts seien  $H$  ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  ein dicht definierter Operator.

**1.14 Definition.** Ein Operator  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  heißt

- (i) *abgeschlossen*, falls gilt: Konvergiert die Folge  $(x_n)_n$ ,  $x_n \in \text{dom}(T)$ , gegen  $x \in H$ , und konvergiert  $(Tx_n)_n$  gegen  $y \in H$ , so folgt  $x \in \text{dom}(T)$  und  $Tx = y$ .
- (ii) *symmetrisch*, falls  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  für alle  $x, y \in \text{dom}(T)$ .

Betrachte den Teilraum  $\text{dom}(T^*) := \{y \in H : x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ ist stetig auf } \text{dom}(T)\}$  von  $H$ . Dann können wir für  $y \in \text{dom}(T^*)$  das auf dem dichten Teilraum  $\text{dom}(T)$  von  $H$  beschränkte lineare Funktional  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$  eindeutig zum stetigen linearen Funktional  $x \mapsto \langle x, z \rangle$  auf ganz  $H$  fortsetzen, wobei  $z \in H$  nach dem Rieszschen Darstellungssatz eindeutig bestimmt ist.  $z$  hängt von  $y$  ab. Die Abbildung  $y \mapsto z$  bezeichnen wir mit  $T^*$ . Insbesondere gilt  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$  für jedes  $x \in \text{dom}(T)$ . Es seien  $y_1, y_2 \in \text{dom}(T^*)$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $y := y_1 + \alpha y_2 \in \text{dom}(T^*)$ , und es gilt

$$\langle x, T^*(y) \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y_2 \rangle = \langle x, T^*(y_1) \rangle + \bar{\alpha} \langle x, T^*(y_2) \rangle = \langle x, T^*(y_1) + \alpha T^*(y_2) \rangle$$

für alle  $x \in \text{dom}(T)$ , wobei erneut der Rieszsche Darstellungssatz verwendet wurde. Da  $\text{dom}(T)$  dicht in  $H$  liegt, ist die Abbildung

$$T^* : H \supset \text{dom}(T^*) \rightarrow H, \quad y \mapsto T^*y = z, \tag{1.2}$$

linear; es gilt  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$  für alle  $x \in \text{dom}(T)$ ,  $y \in \text{dom}(T^*)$ .

**1.15 Definition.** Ist  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  ein dicht definierter Operator, so ist der in (1.2) definierte Operator  $T^*$  *der zu  $T$  adjungierte Operator*;  $T$  heißt *selbstadjungiert*, falls  $T = T^*$ , d. h. falls  $\text{dom}(T) = \text{dom}(T^*)$  und  $Tx = T^*x$  für alle  $x \in \text{dom}(T)$ .

**1.16 Satz:** *Für einen symmetrischen dicht definierten Operator  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  sind äquivalent:*

- (i)  $T$  ist selbstadjungiert.
- (ii)  $T$  ist abgeschlossen und der Kern von  $T^* \pm i$  ist trivial.
- (iii) Das Bild von  $T \pm i$  ist ganz  $H$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Werner [25], Satz VII.2.8, S. 347. □

**1.17 Satz** (Spektralzerlegung selbstadjungierter unbeschränkter Operatoren): *Es sei  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß  $E$  mit*

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\langle E_\lambda x, y \rangle$$

für alle  $x \in \text{dom}(T)$ ,  $y \in H$ . Für jede Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\mathfrak{D}_h := \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle < \infty \right\}$$

ein Teilraum von  $H$ , und es existiert ein durch

$$\langle h(T)x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle, \quad x \in \mathfrak{D}_h, y \in H,$$

$$\|h(T)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle, \quad x \in \mathfrak{D}_h,$$

bestimmter Operator  $h(T) : H \supset \mathfrak{D}_h \rightarrow H$ . Falls die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  für alle  $x \in H$  messbar bzgl.  $d\langle E_\lambda x, x \rangle$  ist, so heißt  $h$   $T$ -messbar; ist die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  fast überall definiert bzgl.  $d\langle E_\lambda x, x \rangle$  für alle  $x \in H$ , so sagen wir,  $h$  existiere  $T$ -fast überall. Sei nun  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -messbare Funktion, die  $T$ -fast überall existiert. Dann ist  $h(T)$  ein dicht definierter abgeschlossener Operator. Der zu  $h(T)$  adjungierte Operator  $h(T)^*$  existiert und ist gegeben durch  $\bar{h}(T)$ .

**Beweis:** Für die Existenz und Eindeutigkeit des Spektralmaßes  $E$ , so dass  $\langle Tx, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle E_\lambda x, y \rangle$  für alle  $x \in \text{dom}(T)$ ,  $y \in H$ , gilt, sei auf Werner [25], S. 355-357, verwiesen. Die Aussagen über  $h(T)$  für eine beliebige Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  folgen aus Theorem 6.1 bei Stone [22], S. 221-226. Die Eigenschaften von  $h(T)$ , falls  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -messbare Funktion ist, die  $T$ -fast überall existiert, findet man in Theorem 6.4 bei Stone, S. 229-230.  $\square$

## 1.4 Distributionen

In diesem Abschnitt sei  $\Omega$  eine offene nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Der Raum der Testfunktionen auf  $\Omega$  ist definiert durch

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{spt}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}\} \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

**1.18 Definition.** Wir sagen, dass eine Folge  $\phi_1, \phi_2, \dots$  von Testfunktionen auf  $\Omega$  in  $\mathscr{D}$  gegen Null konvergiert, falls

- (i) eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  existiert, so dass  $\text{spt}(\phi_j) \subset K$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\phi_j$  sowie alle Ableitungen beliebiger Ordnung von  $\phi_j$  für  $j \rightarrow \infty$  jeweils gleichmäßig gegen Null konvergieren.

**1.19 Satz:** Es seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\Omega$ . Es sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\Omega$ , die  $K$  enthält. Dann existiert eine Testfunktion  $\psi \in \mathscr{D}(U)$  derart, dass  $0 \leq \psi \leq 1$  in  $\Omega$  und  $\psi = 1$  in einer Umgebung von  $K$ .

**Beweis:** Dies ist ein Spezialfall des Theorems 1.4.1 aus Friedlander und Joshi [4], S. 11.  $\square$

**1.20 Definition.** Eine antilineare Abbildung  $T : \mathscr{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Distribution auf  $\Omega$* , falls für jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  eine reelle Zahl  $C \geq 0$  und eine natürliche Zahl  $N$  existieren, so dass

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{j=0}^N \sup_K |\partial^j \phi|$$

für alle  $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$  mit  $\text{spt}(\phi) \subset K$ . Den Raum der Distributionen auf  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathscr{D}'(\Omega)$ .

**1.21 Bemerkung:** Oft wird der Raum der Distributionen für Linearformen  $\mathscr{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, indem man in der obigen Definition antilinear durch linear ersetzt. Ist  $T : \mathscr{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  antilinear, so ist die durch  $\bar{T}(\phi) := \overline{T(\bar{\phi})}$  definierte Abbildung  $\bar{T}$  linear, und bekanntlich gilt  $|z| = |\bar{z}|$  für jede komplexe Zahl  $z$ . Daher lässt sich der folgende Satz für antilineare Abbildungen völlig analog zum linearen Fall beweisen.

**1.22 Satz:** Eine antilineare Abbildung  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine Distribution, wenn  $\lim_{j \rightarrow \infty} T(\phi_j) = 0$  für jede Folge  $\phi_1, \phi_2, \dots$  von Testfunktionen, die für  $j \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{D}$  gegen Null streben.

**Beweis:** Für Linearformen wird der Satz bei Friedlander und Joshi [4] bewiesen, s. Theorem 1.3.2, S. 9. Zusammen mit Bemerkung 1.21 ergibt sich die Behauptung.  $\square$

In dieser Arbeit wird es genügen, sogenannte reguläre Distributionen zu betrachten. Dazu definieren wir den *Raum der lokal integrierbaren Funktionen*

$$L^1_{\text{lok}}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist Lebesgue-messbar, } \int_K |f| dx < \infty \text{ für jede kompakte Menge } K \subset \Omega\}.$$

Offensichtlich ist jede stetige Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar.

**1.23 Satz:** Es sei  $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$ . Dann ist die durch

$$T(\phi) = \int_{\Omega} f(x) \overline{\phi(x)} dx \quad (1.3)$$

definierte antilineare Abbildung  $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  eine Distribution auf  $\Omega$ . Falls  $\int_{\Omega} f(x) \overline{\phi(x)} dx = 0$  für alle  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , so ist  $f = 0$  fast überall in  $\Omega$ .

**Beweis:** Für Linearformen wird dies bei Werner [25] bewiesen, s. Beispiel (a), S. 430-431. Zusammen mit Bemerkung 1.21 folgt die Behauptung.  $\square$

Die Distribution  $T$  aus Satz 1.23 heißt *reguläre Distribution zur lokal integrierbaren Funktion  $f$*  und wird mit  $T_f$  bezeichnet. Da die Abbildung  $f \mapsto T_f$  injektiv ist, identifizieren wir die Funktion  $f \in L^1_{\text{lok}}(\Omega)$  mit der Distribution  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Der *Raum der Schwartz-Funktionen*  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  besteht aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$p_{m,n}(f) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(t)| (1 + |t|)^n < \infty$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Wir sagen, dass eine Folge  $f_1, f_2, \dots$  von Schwartz-Funktionen in  $\mathcal{S}$  gegen Null konvergiert, falls  $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{m,n}(f_j) = 0$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Es gilt

**1.24 Satz:** (i)  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , und die Einbettung  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist stetig.

(ii)  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  liegt dicht in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Wir folgen der Beweisidee bei Friedlander und Joshi [4], S. 94.

(i) Offensichtlich gilt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Es sei  $\phi_1, \phi_2, \dots$  eine Folge von Testfunktionen mit  $\phi_j \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  in  $\mathcal{D}$ , d. h. es existiert eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}$ , so dass der Träger jedes  $\phi_j$  in  $K$  enthalten ist;  $\phi_j$  sowie sämtliche Ableitungen beliebiger Ordnung konvergieren für  $j \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen Null. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$p_{m,n}(\phi_j) = \sup_{t \in K} |\phi_j^{(m)}(t)| (1 + |t|)^n \leq C \cdot \sup_{t \in K} |\phi_j^{(m)}(t)| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

wobei  $C := \max_{t \in K} (1 + |t|)^n$ .

(ii) Es sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Nach Satz 1.19 können wir eine Testfunktion  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit Träger in  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$  wählen, so dass  $0 \leq \phi \leq 1$  in  $\mathbb{R}$  und  $\phi(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $|t| \leq 1$ . Betrachte die Funktionenfolge  $f_1, f_2, \dots$  der durch  $f_j(t) := \phi(t/j)f(t)$  definierten Testfunktionen. Es seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Setze  $C := \max_{\alpha \in \{1, \dots, m\}} \{\max_{t \in \mathbb{R}} |\phi^{(\alpha)}(t)|\}$ . Da  $\phi$  und jede Ableitung beliebiger Ordnung von  $\phi$  stetig mit kompaktem Träger sind, existiert  $C$ , das Maximum über endlich viele nichtnegative reelle Zahlen, in  $[0, \infty)$ . Zusammen mit der Leibniz-Formel und

$$|f^{(m)}(t)|(1 + |t|)^n \leq \frac{1}{1 + |t|} p_{m, n+1}(f) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} p_{m, n}(f - f_j) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(t)\{1 - \phi(t/j)\} - \sum_{\alpha=1}^m \binom{m}{\alpha} j^{-\alpha} \phi^{(\alpha)}(t/j) f^{(m-\alpha)}(t)| (1 + |t|)^n \\ &\leq 2 \sup_{|t| > j} |f^{(m)}(t)|(1 + |t|)^n + \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{\alpha=1}^m \binom{m}{\alpha} j^{-\alpha} |\phi^{(\alpha)}(t/j)| |f^{(m-\alpha)}(t)|(1 + |t|)^n \\ &\leq 2 \sup_{|t| > j} \frac{1}{1 + |t|} p_{m, n+1}(f) + \frac{C}{j} \sum_{\alpha=1}^m \binom{m}{\alpha} p_{m-\alpha, n}(f) \\ &\leq \frac{2}{1 + j} p_{m, n+1}(f) + \frac{C}{j} \sum_{\alpha=1}^m \binom{m}{\alpha} p_{m-\alpha, n}(f) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $j \rightarrow \infty$ . Im Fall  $m = 0$  reduziert sich diese Abschätzung zu

$$\begin{aligned} p_{0, n}(f - f_j) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)\{1 - \phi(t/j)\}|(1 + |t|)^n \leq 2 \sup_{|t| > j} |f(t)|(1 + |t|)^n \leq 2 \sup_{|t| > j} \frac{1}{1 + |t|} p_{0, n+1}(f) \\ &\leq \frac{2}{1 + j} p_{0, n+1}(f) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $j \rightarrow \infty$ . □

**1.25 Satz:** Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  ist eine Bijektion von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  nach  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ; der inverse Operator ist durch

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ixy} dy$$

gegeben. Zudem gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dabei ist  $\langle h_1, h_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\overline{h_2(x)} dx$  für  $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Für einen Beweis sei auf Werner [25], Satz V.2.8, S. 215, verwiesen. □

**1.26 Definition.** Eine antilineare Abbildung  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *temperierte Distribution*, falls eine Konstante  $C \geq 0$  und eine Zahl  $N \in \mathbb{N}_0$  existieren, so dass

$$|T(f)| \leq C \sum_{m, n \leq N} p_{m, n}(f) \tag{1.4}$$

für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Wir bezeichnen den Raum der temperierten Distributionen auf  $\mathbb{R}$  mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**1.27 Bemerkung:** Aus Satz 1.24 (i) folgt, dass jede temperierte Distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  zu einer Distribution  $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$  Anlass gibt. Nach (ii) desselben Satzes ist die temperierte Distribution  $T$  durch ihre Einschränkung  $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$  eindeutig bestimmt.

**1.28 Bemerkung:** Es sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Dann ist die durch  $T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\phi(x)}dx$  definierte Fortsetzung der regulären Distribution  $T_f$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine temperierte Distribution, denn mit  $C := 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  und  $N := 2$  gilt

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |\overline{\phi(t)}| dt \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|(1+|t|)^2 \cdot \frac{1}{(1+|t|)^2} dt \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} p_{0,2}(\phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt = C p_{0,2}(\phi) \leq C \sum_{m,n \leq 2} p_{m,n}(\phi) \end{aligned}$$

für jede Schwartz-Funktion  $\phi$ .

**1.29 Definition.** Es sei  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Wir definieren die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}T$  von  $T$  durch

$$\mathcal{F}T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\mathcal{F}T)(\phi) := T(\mathcal{F}^* \phi).$$

Insbesondere ist die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}T_f$  von  $T_f$  für eine Funktion  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  im Sinne von Definition 1.29 erklärt. Wir schreiben  $\mathcal{F}f$  anstelle von  $\mathcal{F}T_f$ .

**1.30 Satz:** Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist eine Bijektion.

**Beweis:** Für Linearformen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ , die (1.4) genügen, s. Werner [25], S. 434. Da  $(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})})^* = (\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})})^{-1}$ , folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.5 Drei Sätze aus der Funktionentheorie

**1.31 Satz** (Holomorphiesatz für parameterabhängige Integrale): Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Funktion  $z \mapsto f(z, t)$  für jedes  $t \in [a, b]$  holomorph ist. Dann ist die durch

$$F(z) := \int_a^b f(z, t) dt$$

definierte Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph.

**Beweis:** Der Beweis wird mit klassischen Sätzen der Funktionentheorie geführt, s. Königsberger [10], S. 228.  $\square$

**1.32 Satz** (Weierstraß): Ist  $(f_n)$  eine Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge  $U$ , die lokal gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, so gilt:

- (i)  $f$  ist holomorph;
- (ii) auch die Folge  $(f'_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f'$ .

**Beweis:** Der Beweis von (i) erfolgt mit Hilfe des Satzes von Morera; (ii) wird mit der Integralformel für Ableitungen holomorpher Funktionen gezeigt. Für Details s. Königsberger [10], S. 207.  $\square$

**1.33 Satz** (Holomorphiesatz): Es seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $V$  eine Lebesguemessbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Es sei  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so dass für jeden fixierten Parameter  $z \in U$  die Funktion  $t \mapsto f(z, t)$  über  $V$  integrierbar sei. Zusätzlich gelte:

(i) Für jedes fixierte  $t \in V$  ist  $z \mapsto f(z, t)$  holomorph in  $U$ .

(ii) Es gibt eine über  $V$  integrierbare Funktion  $\Phi$  derart, dass

$$|f(z, t)| \leq \Phi(t) \quad \text{für alle } (z, t) \in U \times V.$$

Dann ist die durch  $F(z) := \int_V f(z, t) dt$  definierte Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, und es gilt

$$F'(z) = \int_V \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) dt.$$

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Königsberger [10], S. 286, verwiesen. □

**1.34 Bemerkung:** Es sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  derart, dass  $\mathcal{J} := U \cap \mathbb{R}$  nichtleer ist. Es sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, so dass  $f|_{\mathcal{J}}(x) \in \mathbb{R}$  für jedes  $x \in \mathcal{J}$ . Dann ist die Funktion  $f|_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft reell differenzierbar, und jede reelle Ableitung beliebiger Ordnung von  $f|_{\mathcal{J}}$  stimmt an jedem Punkt  $x \in \mathcal{J}$  mit der komplexen Ableitung derselben Ordnung von  $f$  bei  $x$  überein. Zudem gilt  $f|_{\mathcal{J}}^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $x \in \mathcal{J}$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach dem Grad  $n \in \mathbb{N}$  der Ableitung. Unter den Voraussetzungen der Bemerkung ist der reelle Differentialquotient bei einem beliebigem  $x \in \mathcal{J}$  ein Spezialfall des komplexen Differentialquotienten bei  $x$ , also existiert

$$f|_{\mathcal{J}}'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f|_{\mathcal{J}}(x+t) - f|_{\mathcal{J}}(x)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

in  $\mathbb{R}$ , wobei  $t$  nur reelle,  $h$  komplexe Werte annehmen darf. Wir nehmen nun an, dass für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass die  $j$ -te reelle Ableitung von  $f|_{\mathcal{J}}$  für jedes  $x \in \mathcal{J}$  in  $\mathbb{R}$  existiert und mit der  $j$ -ten komplexen Ableitung von  $f$  bei  $x$  übereinstimmt, für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann zeigt eine erneute Betrachtung der Differentialquotienten, dass

$$f|_{\mathcal{J}}^{(n+1)}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f|_{\mathcal{J}}^{(n)}(x+t) - f|_{\mathcal{J}}^{(n)}(x)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h}$$

in  $\mathbb{R}$  existiert. □

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir diese Bemerkung mehrfach verwenden, ohne dies explizit zu erwähnen, da es jeweils offensichtlich sein wird, dass die betrachteten Funktionen Punkte aus  $\mathcal{J}$  nach  $\mathbb{R}$  abbilden.

## 1.6 Unendliche Produkte

In diesem kurzen Abschnitt über unendliche Produkte folgen wir Remmerts Skript [18].

Es sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge komplexer Zahlen und  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der Partialprodukte, wobei  $p_j := \prod_{n=0}^j c_n$ . Dann ist  $\prod_{n=0}^{\infty} c_n$  das *unendliche Produkt* mit den Faktoren  $c_n$ .

**1.35 Definition.** Ein (unendliches) Produkt  $\prod_{n=0}^{\infty} c_n$  komplexer Zahlen heißt *konvergent*, falls ein  $m \in \mathbb{N}_0$  existiert, so dass die Folge

$$(\hat{p}_j)_{j=m}^{\infty}, \quad \hat{p}_j := \prod_{n=m}^j c_n,$$

gegen eine komplexe Zahl  $\hat{c}_m \neq 0$  konvergiert. Man nennt  $c := \prod_{n=0}^{m-1} c_n \cdot \hat{c}_m$  den *Wert* des unendlichen Produktes  $\prod_{n=0}^{\infty} c_n$  und schreibt  $c = \prod_{n=0}^{\infty} c_n$ .

Falls der Wert  $c$  des unendlichen Produktes  $\prod_{n=0}^{\infty} c_n$  existiert, so hängt dieser nicht von  $m$  ab, denn wegen  $\hat{c}_m \neq 0$  gilt  $c_n \neq 0$  für alle  $n \geq m$ , und ist  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \neq m$ , ohne Einschränkung  $m < k$ , so dass die Folge

$$(\hat{p}_j)_{j=k}^{\infty}, \quad \hat{p}_j := \prod_{n=k}^j c_n,$$

gegen eine komplexe Zahl  $\hat{c}_k \neq 0$  konvergiert, so gilt  $c_n \neq 0$  für alle  $n \geq k$  und

$$\hat{c}_m = \prod_{n=m}^{k-1} c_n \cdot \hat{c}_k.$$

**1.36 Satz:** *Folgende Aussagen über eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  komplexer Zahlen sind äquivalent:*

- (i) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  konvergiert absolut.
- (ii) Das Produkt  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + |u_n|)$  ist konvergent.

**Beweis:** Dies folgt aus Satz 19.1.9 bei Remmert [18], S. 14-16. □

Wir sagen, dass ein Produkt  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$  komplexer Zahlen *absolut konvergiert*, falls eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus Satz 1.36 erfüllt ist. Für unsere Anwendung in Kapitel drei genügt es, Satz 1.36 für reelle Zahlen zu beweisen. Für diese Version s. Knopp [8], Satz 7, S. 229.



## 2 Hankel-Operatoren

Dieses Kapitel dient zur Einführung von Hankel-Operatoren und orientiert sich an den Monographien von Power [17] und Peller [16].

Definiere  $\ell_+^2 = \{x = (x_0, x_1, \dots) : x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$ . Eine unendliche Matrix  $S$  heißt *Hankel-Matrix*, falls sie von der Form

$$S = (a_{i+j})_{i,j \in \mathbb{N}_0} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

ist. Falls  $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  in  $\ell_+^2$  ist, so heißt der auf dichten Teilmenge  $\{x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell_+^2 : x_j \neq 0 \text{ nur für endlich viele } j \in \mathbb{N}_0\}$  von  $\ell_+^2$  definierte Operator

$$S : \{x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell_+^2 : x_j \neq 0 \text{ nur für endlich viele } j \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \ell_+^2, \quad b \mapsto S(b) = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_{i+j} b_i \right)_{j \in \mathbb{N}_0},$$

*Hankel-Operator*. Es gilt der wichtige

**2.1 Satz (Nehari):** *Der Hankel-Operator  $S$  mit Matrix  $(a_{i+j})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$  ist genau dann beschränkt auf  $\ell_+^2$ , wenn es eine Funktion  $\phi$  in  $L^\infty(\mathbb{S}^1)$  gibt, so dass*

$$a_m = \hat{\phi}(-m), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

*gilt.*

*In diesem Fall ist  $\|S\| = \inf \left\{ \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} : \hat{\phi}(-n) = a_n, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ . Dabei bezeichne  $\hat{\phi}(N)$  den  $N$ -ten Fourier-Koeffizienten von  $\phi$ .*

**Beweis:** Ein Beweis findet sich z. B. bei Peller [16], Theorem 1.1, S. 3-5. Dort wird die Existenz einer Funktion  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$  mit  $a_m = \hat{\varphi}(m)$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  verlangt; dann ist auch die durch  $\phi(z) := \varphi(\bar{z})$  definierte Funktion  $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ , und es gilt  $a_m = \hat{\phi}(-m)$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ .  $\square$

Wir identifizieren  $\ell^2$  mit  $L^2(\mathbb{S}^1)$  sowie  $\ell_+^2$  mit dem Hardy-Raum  $H^2$ .<sup>2</sup> Zu  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$  definieren wir den *Hankel-Operator  $S_\varphi$  mit Symbol  $\varphi$*  auf der dichten Teilmenge  $\{f \in H^2 : f(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j z^{m_j} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, 0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_n, \text{ und } \alpha_j \in \mathbb{C}\}$  von  $H^2$  durch

$$S_\varphi = PJM_\varphi|_{H^2}.$$

Dabei ist  $P : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$  die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum  $H^2$  von  $L^2(\mathbb{S}^1)$ ,  $J : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$  mit  $(Jf)(z) = f(\bar{z})$  und  $M_\varphi : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$  der durch  $M_\varphi(f) = \varphi \cdot f$  definierte Multiplikationsoperator. Ein Symbol  $\varphi$  ist i. A. nicht eindeutig bestimmt, s. Peller [16], S. 9. Insbesondere ist der Hankel-Operator  $S_\phi$  mit Symbol  $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$  wohldefiniert, denn  $L^\infty(\mathbb{S}^1) \subset L^2(\mathbb{S}^1)$ .

<sup>2</sup>Dies und weitere Hintergründe über Fourier-Koeffizienten, den Hardy-Raum  $H^2(\mathbb{D})$  und über  $H^2$  findet man im Anhang, Abschnitt „Harmonische Analysis“.

**2.2 Satz:** Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$ . Dann ist der Hankel-Operator  $S_\varphi$  genau dann beschränkt auf  $H^2$ , wenn eine Funktion  $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$  existiert derart, dass  $\hat{\phi}(-n) = \hat{\varphi}(-n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Ist  $S_\varphi$  beschränkt auf  $H^2$ , so gilt  $\|S_\varphi\| = \inf \left\{ \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} : \hat{\phi}(-n) = \hat{\varphi}(-n), n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ .

**Beweis:** Dies ist im Wesentlichen eine Umformulierung des Satzes von Nehari, s. Peller [16], S. 6. Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$ . Dann besitzt  $S_\varphi$  bzgl. der Orthonormalbasis  $1, z, z^2, \dots$  von  $H^2$  die Matrixdarstellung  $(\hat{\varphi}(-m-n))_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ . Mit dem Satz von Nehari folgt die Behauptung.  $\square$

Damit ist ein Hankel-Operator genau dann beschränkt auf  $H^2$ , wenn er ein beschränktes Symbol besitzt.

**2.3 Beispiel:** Wie man leicht nachrechnet, ist durch die Funktion  $\phi$  mit  $\phi(z) = iz \arg(z)$  ein Symbol für die Hilbertsche Matrix

$$H = \left( \frac{1}{1+i+j} \right)_{i,j \in \mathbb{N}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

gegeben. Es gilt  $\|H\| = \pi$ .<sup>3</sup>

**2.4 Satz:** Die Abbildung  $G : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ,

$$(Gf)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-it)} f\left(\frac{1+it}{1-it}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.  $H^2(\mathbb{R}) := G(H^2)$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Es sei  $t \in \mathbb{R}$ . Setze  $\theta = 2 \arctan(t)$  und  $\xi = \sin\{\arctan(t)\}$ . Dann gilt

$$t = \tan\{\arctan(t)\} = \frac{\sin\{\arctan(t)\}}{\cos\{\arctan(t)\}} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Durch Quadrieren und Umformen nach  $\xi^2$  folgt  $\xi^2 = t^2/(1+t^2)$ , also

$$\sin\{\arctan(t)\} = \xi = \text{sign}(t) \cdot \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\{\arctan(t)\} = \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (*)$$

Aus (\*) folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left( e^{i \arctan(t)} \right)^2 \\ &= (\cos\{\arctan(t)\})^2 - (\sin\{\arctan(t)\})^2 + 2i \sin\{\arctan(t)\} \cos\{\arctan(t)\} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2i \frac{t}{1+t^2} \\ &= \frac{1+it}{1-it}. \end{aligned} \quad (**)$$

Es seien  $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$  und  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Mit Hilfe der Transformation  $t = \tan(\theta/2)$ ,  $d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt$ , der offensichtlichen Gleichung  $1/(1+t)^2 = 1/|1-it|^2$  und (\*\*) berechnen wir

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1+it}{1-it}\right) \right|^2 \frac{1}{|1-it|^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |(Gf)(t)|^2 dt$$

<sup>3</sup>S. Peller [16], S. 6., für den Beweis der Ungleichung  $\|H\| \leq \pi$  und Corollary 5.19, S. 36, für den Beweis der Gleichheit.

sowie

$$\|F(g)\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(i \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}\right) \right|^2 \frac{4\pi}{|1 + e^{i\theta}|^2} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \frac{2}{|2/(1 - it)|^2} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt,$$

wobei  $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$  für  $z \in \mathbb{S}^1$  fast überall definiert ist durch

$$(Fg)(z) = \sqrt{\pi} \frac{2}{1+z} g\left(i \frac{1-z}{1+z}\right).$$

Zudem gilt  $G(F(g))(t) = g(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  fast überall, wie man leicht nachrechnet. Der Operator  $G$  ist somit eine surjektive Isometrie, also ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ist  $H^2(\mathbb{R})$  als Bild der abgeschlossenen Teilmenge  $H^2$  von  $L^2(\mathbb{S}^1)$  unter  $G$  abgeschlossen.  $\square$

**2.5 Bemerkung:** Es sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Aus dem Transformationssatz folgt unmittelbar, dass das Bild einer Menge  $A$  unter dem Diffeomorphismus  $t \mapsto 2 \arctan(t) = \theta$  genau dann Maß null besitzt, falls  $A$  selbst von Maß null ist. Daher dürfen wir für jede  $L^p(\mathbb{S}^1)$ -Funktion  $\phi$  die  $L^p(\mathbb{R})$ -Funktion  $\psi$  durch  $\psi(t) := \phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$  definieren. Genau genommen gilt für zwei Repräsentanten  $\phi_1, \phi_2$  derselben Äquivalenzklasse in  $L^2(\mathbb{S}^1)$ , dass  $\phi_1\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \phi_2\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$  für  $t \in \mathbb{R}$  fast überall.

$H^2(\mathbb{R})$  heißt *Hardy-Raum auf der Achse*. Bei Nikolski [14], S. 143-146, wird gezeigt, dass  $H^2(\mathbb{R})$  der Raum der Grenzfunktionen bzgl. des sogenannten *Hardy-Raums in der oberen Halbebene*

$$H^2(U) := \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist analytisch, } \sup_{y>0} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx} < \infty \right\}$$

ist. Dabei bezeichne  $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  die obere Halbebene.

Zu  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  definieren wir den *Hankel-Operator*  $S_\psi$  mit *Symbol*  $\psi$  auf  $H^2(\mathbb{R})$  wie folgt:

$$S_\psi = QRM_\psi|_{H^2(\mathbb{R})}.$$

Dabei ist  $Q : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum  $H^2(\mathbb{R})$  von  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $R : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  mit  $(Rf)(x) = f(-x)$  und  $M_\psi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  der durch  $M_\psi(f) = \psi \cdot f$  definierte Multiplikationsoperator. Zwischen Hankel-Operatoren auf dem Einheitskreis und der reellen Achse gilt der folgende Zusammenhang:

**2.6 Satz:** Es seien  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  und  $S_\psi$  der Hankel-Operator auf  $H^2(\mathbb{R})$  mit Symbol  $\psi$ . Dann ist  $G^* S_\psi G$  der Hankel-Operator  $S_{z\phi}$  auf  $H^2$ , wobei

$$\phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \psi(t).$$

**Beweis:** Es sei  $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ . Dann gilt für reelle  $t$ , dass

$$(GJM_z f)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-it)} \frac{1-it}{1+it} f\left(\frac{1-it}{1+it}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+it)} f\left(\frac{1-it}{1+it}\right) = (RGf)(t) \quad (*)$$

fast überall. Es sei  $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}^1)$ . Dann ist die durch  $\psi(t) := \phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$  definierte Funktion  $\psi$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , und es gilt

$$(GM_\phi f)(t) = \psi(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-it)} f\left(\frac{1+it}{1-it}\right) \right] = (M_\psi Gf)(t) \quad (**)$$

für  $t \in \mathbb{R}$  fast überall. Zudem folgt aus Satz 2.4, dass  $G^*QG = P$  und damit  $PG^* = G^*Q$ . Zusammen mit (\*) und (\*\*) erhalten wir

$$S_z\phi = PJM_z\phi|_{H^2} = PG^*RGM_\phi|_{H^2} = G^*QRGM_\phi|_{H^2} = G^*QRM_\psi|_{H^2(\mathbb{R})}G = G^*S_\psi G,$$

was zu beweisen war.  $\square$

Die Gültigkeit des Satzes 2.6 wird bei Power [17] auf Seite 14 formuliert.

Im Folgenden möchten wir Hankel-Operatoren als Integraloperatoren  $\Gamma_k : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  mit

$$(\Gamma_k f)(x) = \int_0^\infty k(x+y)f(y)dy, \quad x > 0, \quad (2.1)$$

einführen, und orientieren uns dabei an Peller [16], S. 46-49. Zur Motivation formulieren wir zunächst

**2.7 Satz:** *Es gilt  $H^2(\mathbb{R}) = \{\mathcal{F}^{-1}f : f \in L^2(\mathbb{R}), f = 0 \text{ in } (-\infty, 0)\}$ , wobei  $\mathcal{F}$  wie üblich die Fourier-Transformation bezeichne.*

**Beweis:** Ein Beweis findet sich bei Nikolski [14], Lemma 6.2.2, S. 144.  $\square$

Welche Bedingungen müssen an  $k$  gestellt werden, um den Integraloperator  $\Gamma_k$  definieren zu können? Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle.

- (i) Für eine Funktion  $k$  mit  $\int_0^\infty \int_0^\infty |k(x+y)|^2 dx dy < \infty$  ist der durch (2.1) definierte Operator  $\Gamma_k : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  ein Hilbert-Schmidt-Operator.
- (ii) Falls  $k \in L^1(0, \infty)$ , so lässt sich mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini leicht nachrechnen, dass

$$\int_0^\infty |(\Gamma_k f)(x)|^2 dx \leq \left( \int_0^\infty |k(t)| dt \right)^2 \int_0^\infty |f(y)|^2 dy$$

für jedes  $f \in L^2(0, \infty)$ , also ist  $\Gamma_k$  beschränkt mit  $\|\Gamma_k\| \leq \|k\|_{L^1(0, \infty)}$ .

Diese direkte Vorgehensweise scheidet, wenn  $k$  eine beliebige Distribution auf  $(0, \infty)$  ist.<sup>4</sup>

Es sei nun  $k \in \mathcal{D}'(0, \infty)$ . Wir fassen  $\mathcal{D}(0, \infty)$  und  $\mathcal{D}(-\infty, 0)$  auf natürliche Weise als Teilräume von  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  auf, indem wir Testfunktionen aus  $\mathcal{D}(0, \infty)$  bzw.  $\mathcal{D}(-\infty, 0)$  trivial auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Aus der Definition der Faltung folgt unmittelbar, dass  $\text{spt}(\phi * \psi) \subset \text{spt}(\phi) + \text{spt}(\psi) = \{x+y | x \in \text{spt}(\phi), y \in \text{spt}(\psi)\}$ , also bildet der Faltungsoperator  $*$  ein Tupel  $(\phi, \psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$  auf eine Funktion in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ab. Betrachte  $R : \mathcal{D}(-\infty, 0) \rightarrow \mathcal{D}(0, \infty)$ ,  $(R\phi)(x) = \phi(-x)$ . Nun können wir die Distribution  $q \in \mathcal{D}'(-\infty, 0)$  wie folgt definieren:

$$q(\phi) := k(R\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(-\infty, 0) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Wir definieren die Sesquilinearform  $G_q$  durch

$$G_q[\phi, \psi] := q(\bar{\phi} * \psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}(-\infty, 0). \quad (2.2)$$

Man beachte, dass für Testfunktionen  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(-\infty, 0)$  der Träger der Faltung ebenfalls eine Teilmenge von  $(-\infty, 0)$  ist:  $\text{spt}(\phi * \psi) \subset \text{spt}(\phi) + \text{spt}(\psi) \subset (-\infty, 0)$ . Falls die Sesquilinearform

<sup>4</sup>S. Kapitel 1.4 für eine kurze Einführung in die Distributionstheorie.

$G_q$  aus (2.2) beschränkt auf  $\mathcal{D}(-\infty, 0) \times \mathcal{D}(-\infty, 0)$  ist, d. h. falls eine Konstante  $M \geq 0$  existiert, so dass  $|G_q[\phi, \psi]| \leq M \|\phi\|_{L^2(-\infty, 0)} \|\psi\|_{L^2(-\infty, 0)}$  für alle  $\phi, \psi$  aus dem dichten Teilraum  $\mathcal{D}(-\infty, 0)$  von  $L^2(-\infty, 0)$  gilt, so können wir  $G_q$  eindeutig auf das gesamte kartesische Produkt  $L^2(-\infty, 0) \times L^2(-\infty, 0)$  fortsetzen, und es gilt

$$|G_q[f, g]| \leq M \|f\|_{L^2(-\infty, 0)} \|g\|_{L^2(-\infty, 0)}$$

für alle  $f, g \in L^2(-\infty, 0)$  und dieselbe Konstante  $M$ . Mit Satz 1.4 folgt, dass genau ein beschränkter linearer Operator  $T_q : L^2(-\infty, 0) \rightarrow L^2(-\infty, 0)$  existiert derart, dass

$$G_q[f, g] = \langle f, T_q g \rangle_{L^2(-\infty, 0)} = \langle T_q^* f, g \rangle_{L^2(-\infty, 0)} = \int_{-\infty}^0 (T_q^* f)(x) \overline{g(x)} dx \quad (2.3)$$

für alle  $f, g \in L^2(-\infty, 0)$ .

**2.8 Lemma:** *Es sei  $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $k(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $x \rightarrow 0+$  und für  $x \rightarrow \infty$ . Dann ist der durch (2.1) gegebene Operator  $\Gamma_k : \mathcal{D}(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  wohldefiniert.*

**Beweis:** Aus den Voraussetzungen des Lemmas folgt unmittelbar, dass  $C := \sup_{x \in (0, \infty)} |x k(x)| < \infty$ .

Wähle zwei positive reelle Zahlen  $x_0$  und  $x_\infty$  mit  $x_0 < x_\infty$ . Dann gilt für jedes fest gewählte  $y > 0$ , dass

$$\{x + y\} |k(x + y)| \leq C \text{ für alle } x \in (0, x_0) \cup (x_\infty, \infty). \quad (*)$$

Es sei  $g \in \mathcal{D}(0, \infty)$ . Dann gilt mit der Hölderschen Ungleichung, dem Satz von Fubini und (\*), dass

$$\begin{aligned} \|\Gamma_k g\|_{L^2(0, \infty)}^2 &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty k(x + y) \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) \cdot g(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty |k(x + y)|^2 \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) dy \cdot \|g\|_{L^2(0, \infty)}^2 \right\} dx \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) \int_0^\infty |k(x + y)|^2 dx dy \cdot \|g\|_{L^2(0, \infty)}^2 \\ &= \|g\|_{L^2(0, \infty)}^2 \left\{ \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) \int_0^{x_0} |k(x + y)|^2 dx dy + \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) \int_{x_0}^{x_\infty} |k(x + y)|^2 dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) \int_{x_\infty}^\infty |k(x + y)|^2 dx dy \right\} \\ &\leq \|g\|_{L^2(0, \infty)}^2 \left\{ \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) C^2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{(x + y)^2} dy + \int_0^\infty \int_{x_0}^{x_\infty} \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) |k(x + y)|^2 dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \mathbf{1}_{\text{spt}(g)}(y) C^2 \int_{x_\infty}^\infty \frac{dx}{(x + y)^2} dy \right\} \\ &= \|g\|_{L^2(0, \infty)}^2 \left\{ C^2 \int_{\text{spt}(g)} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x_0 + y} + \frac{1}{x_\infty + y} \right) dy + \int_{\text{spt}(g) \times [x_0, x_\infty]} |k(x + y)|^2 d(x, y) \right\} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

denn in der vorletzten Zeile der Abschätzung tauchen ausschließlich Integrale von stetigen, nicht-negativen Funktionen über kompakte Mengen auf.  $\square$

Es sei  $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $k(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $x \rightarrow 0+$  und für  $x \rightarrow \infty$ , und es sei  $q : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $q(x) = k(-x)$ . Definiere  $\tilde{\Gamma}_q : \mathcal{D}(-\infty, 0) \rightarrow L^2(-\infty, 0)$  durch

$$(\tilde{\Gamma}_q \phi)(x) := (\Gamma_k R \phi)(-x) = \int_0^\infty q(x-y) \phi(-y) dy, \quad x < 0.$$

Mit (2.2) lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$G_q[\phi, \psi] = \int_{-\infty}^0 q(y) \int_{-\infty}^\infty \phi(y-x) \overline{\psi(x)} dx dy = \int_{-\infty}^0 \overline{\psi(x)} \int_0^\infty q(x-y) \phi(-y) dy dx = \int_{-\infty}^0 \overline{\psi(x)} (\tilde{\Gamma}_q \phi)(x) dx$$

für alle  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(-\infty, 0)$ . Andererseits folgt mit (2.3), dass

$$\int_{-\infty}^0 \overline{\psi(x)} \left\{ (T_q^* \phi)(x) - (\tilde{\Gamma}_q \phi)(x) \right\} dx = 0$$

für alle  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(-\infty, 0)$ , und somit stimmen der beschränkte Operator  $T_q^*$  und der Operator  $\tilde{\Gamma}_q$  auf dem dichten Teilraum  $\mathcal{D}(-\infty, 0)$  von  $L^2(-\infty, 0)$  überein. Mithin ist  $\tilde{\Gamma}_q$  beschränkt auf  $\mathcal{D}(-\infty, 0)$  und kann eindeutig zum beschränkten Operator  $T_q^*$  aus (2.3) auf ganz  $L^2(-\infty, 0)$  fortgesetzt werden. Schließlich haben wir gezeigt:

**2.9 Satz:** *Es sei  $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $k(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $x \rightarrow 0+$  und für  $x \rightarrow \infty$ . Die Sesquilinearform  $G_q$  aus (2.2) sei beschränkt auf  $L^2(-\infty, 0) \times L^2(-\infty, 0)$ . Dann lässt sich der in (2.1) definierte Integraloperator  $\Gamma_k : \mathcal{D}(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  eindeutig zu einem beschränkten Operator auf  $L^2(0, \infty)$  fortsetzen, den wir ebenfalls mit  $\Gamma_k$  bezeichnen.*

Ein Integraloperator  $\Gamma_k$  aus Satz 2.9 heißt *kontinuierlicher Hankel-Operator*. Falls  $k \in \mathcal{D}'(0, \infty)$  nicht die Bedingungen aus Satz 2.9 erfüllt, so kann der kontinuierliche Hankel-Operator  $\Gamma_k$  als der Operator  $T_q^* R$  durch  $(T_q^* R)(f) = T_q^*(Rf)$  für  $f \in L^2(0, \infty)$  definiert werden, falls die Sesquilinearform  $G_q$  aus (2.2) beschränkt ist. Dabei ist  $T_q$  der beschränkte lineare Operator aus (2.3).

**2.10 Bemerkung:** *Wir haben gesehen, dass genau ein beschränkter Operator  $T_q$  existiert, so dass  $G_q[f, g] = \langle T_q^*(f), g \rangle$  für alle  $f, g \in L^2(-\infty, 0)$ , falls die Sesquilinearform  $G_q$  beschränkt ist. Andererseits ist  $G_q$  offensichtlich eine beschränkte Sesquilinearform, falls es genau einen beschränkten Operator  $T_q$  gibt derart, dass  $G_q[f, g] = \langle T_q^*(f), g \rangle$  für alle  $f, g \in L^2(-\infty, 0)$ . In diesem Sinne charakterisiert der folgende Satz die Distributionen  $q \in \mathcal{D}'(-\infty, 0)$ , für welche die Sesquilinearform  $G_q$  aus (2.2) beschränkt ist.*

**2.11 Satz:** *Es sei  $q \in \mathcal{D}'(-\infty, 0)$ . Der Operator  $T_q$  aus (2.3) ist genau dann beschränkt auf  $L^2(-\infty, 0)$ , wenn eine Funktion  $\varkappa \in L^\infty(\mathbb{R})$  existiert, so dass  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \varkappa|_{(-\infty, 0)} = q$ , d. h. wenn*

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \varkappa \right) (\phi) = q(\phi) \quad \text{für jede Testfunktion } \phi \in \mathcal{D}(-\infty, 0).$$

*Ist  $T_q^*$  beschränkt, so gilt  $\|T_q^*\| = \inf \left\{ \|\varkappa\|_\infty : \varkappa \in L^\infty(\mathbb{R}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \varkappa|_{(-\infty, 0)} = q \right\}$ .*

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Peller [16], Theorem 8.1, S. 49-52.  $\square$

Ausgedrückt für  $k \in \mathcal{D}'(0, \infty)$  bedeutet dies:

**2.12 Satz:** Es sei  $k \in \mathcal{D}'(0, \infty)$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $\Gamma_k$  ist beschränkt auf  $L^2(0, \infty)$ ;

(ii) es gibt eine Funktion  $\psi$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , so dass  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi|_{(0, \infty)} = k$ .

Ist  $\Gamma_k$  beschränkt, so gilt  $\|\Gamma_k\| = \inf \left\{ \|\psi\|_\infty : \psi \in L^\infty(\mathbb{R}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi|_{(0, \infty)} = k \right\}$ .

**Beweis:** Für den Beweis dieses Satzes sei auf Peller [16], Theorem 8.8, S. 52, verwiesen.  $\square$

**2.13 Beispiel:** Der Carleman-Operator  $\Gamma : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  ist definiert durch

$$(\Gamma f)(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x+y} f(y) dy.$$

Es gilt  $\|\Gamma\| = \pi$ . Betrachte die unitären Operatoren

$$\begin{aligned} V : L^2(0, \infty) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}), & (Vf)(t) &= \sqrt{2}e^t f(e^{2t}); \\ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathcal{F}^*(VTV^*)\mathcal{F} = M_{\frac{\pi}{\cosh(y \cdot \pi/2)}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R});$$

das (rein kontinuierliche) Spektrum des Carleman-Operators ist gegeben durch

$$\sigma(\Gamma) = \overline{\left\{ \frac{\pi}{\cosh(y \cdot \pi/2)} : y \in \mathbb{R} \right\}} = [0, \pi].$$

**Beweis:** Nach Peller [16], Theorem 8.14, S. 56, gilt  $\|\Gamma\| = \pi$ . Wie man leicht nachrechnet, ist  $V$  ein unitärer Operator mit

$$(V^*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} g\left(\frac{1}{2} \log(x)\right), \quad x > 0,$$

fast überall. Es sei  $f \in \mathcal{D}(0, \infty)$ . Setzen wir  $x = e^{2t}$ ,  $y = e^{2s}$ , so gilt mit dem Transformationsatz

$$\int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{f(e^{2s})2e^{2s}}{e^{2s} + e^{2t}} ds = \frac{1}{\sqrt{2}e^t} \int_{-\infty}^\infty \frac{2e^s e^t}{e^{2s} + e^{2t}} (Vf)(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2}e^t} \int_{-\infty}^\infty \frac{(Vf)(s)}{\cosh(t-s)} ds.$$

Schreiben wir  $g(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{(Vf)(s)}{\cosh(t-s)} ds$ , so sehen wir, dass  $V^*CV = \Gamma$  auf  $\mathcal{D}(0, \infty)$  gilt, wobei  $C$  den Faltungsoperator mit  $\frac{1}{\cosh}$  bezeichne. Wie man mühelos mit der Hölderschen Ungleichung nachweist, ist  $C$  ein beschränkter Operator  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ; dass  $V, V^*$  und  $\Gamma$  beschränkte Operatoren sind, wissen wir bereits. Es ist leicht zu sehen, dass  $V\mathcal{D}(0, \infty) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Daher gilt  $VTV^* = C$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ . Es folgt, dass  $\mathcal{F}C\mathcal{F}^*$  der Multiplikationsoperator mit der Funktion  $\sqrt{2\pi} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh} \right\}$  ist.<sup>5</sup>

Wir integrieren die Abbildung  $h(z) = \frac{e^{-iyz}}{e^z + e^{-z}}$  entlang des Weges aus Abbildung 2.1, einem positiv orientierten Rechteck mit Eckpunkten bei  $\pm N$  und  $\pm N + i\pi$ , mit

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_3 : [-N, N] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_1(t) &= t, & \gamma_3(t) &= -t + i\pi, \\ \gamma_2, \gamma_4 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_2(t) &= N + it, & \gamma_4(t) &= -N + i\pi - it. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Genau genommen gilt dies nach Satz 1.1 (i) auf dem dichten Teilraum  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  von  $L^2(\mathbb{R})$ , und da  $1/\cosh$  eine Schwartz-Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist, ist  $M_{\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{1/\cosh\}}$  beschränkt auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ . Daher gilt  $\mathcal{F}C\mathcal{F}^* = M_{\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{1/\cosh\}}$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ .

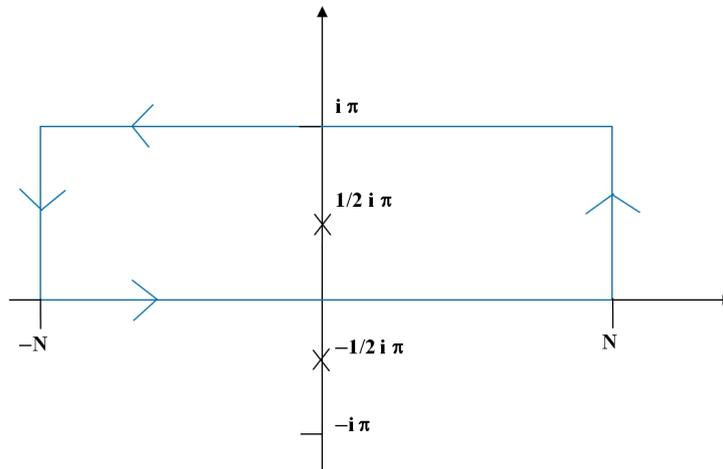


Abbildung 2.1: Integrationsweg; selbst erstellt mit Microsoft Word

Es gilt

$$\int_{\gamma_1} h(z) dz = \int_{-N}^N \frac{e^{-ity}}{e^t + e^{-t}} dt = \frac{1}{2} \int_{-N}^N \frac{e^{-ity}}{\cosh(t)} dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}\{\cosh(t)^{-1}\})(y),$$

$$\int_{\gamma_3} h(z) dz = \int_{-N}^N \frac{e^{-iy(-t+i\pi)}}{e^{-t+i\pi} + e^{t-i\pi}} \cdot (-1) dt = -e^{y\pi} \int_{-N}^N \frac{e^{iyt}}{-(e^{-t} + e^t)} dt = \frac{e^{y\pi}}{2} \int_{-N}^N \frac{e^{iyt}}{\cosh(t)} dt$$

$$= \frac{e^{y\pi}}{2} \int_{-N}^N \frac{e^{-iyt}}{\cosh(t)} dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{e^{y\pi}}{2} \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}\{\cosh(t)^{-1}\})(y),$$

$$\left| \int_{\gamma_2} h(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{-iy(N+it)}}{e^{N+it} + e^{-N-it}} \cdot i dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{yt} \cdot e^{-N}}{|e^{it} + e^{-2N-it}|} dt \leq \pi \cdot e^{\pi y} \cdot \frac{e^{-N}}{1 - e^{-2N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

$$\left| \int_{\gamma_4} h(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{-iy(-N+i\pi-it)}}{e^{-N+i\pi-it} + e^{N-i\pi+it}} \cdot (-i) dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{y\pi} e^{-yt}}{|e^{-2N-it} + e^{it}|} \frac{1}{e^N} dt$$

$$\leq \pi \cdot e^{\pi y} \cdot \frac{e^{-N}}{1 - e^{-2N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Menge der Polstellen von  $h$  gegeben ist durch

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \in \left\{ \dots, -i\frac{5\pi}{2}, -i\frac{3\pi}{2}, -i\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}, i\frac{3\pi}{2}, i\frac{5\pi}{2}, \dots \right\} \right\};$$

$h$  besitzt im von  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  eingeschlossenen Gebiet also genau einen Pol bei  $z_0 = i\frac{\pi}{2}$ , und es gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} h = \frac{e^{y\frac{\pi}{2}}}{2i}.$$

Mit dem Residuensatz folgt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right\} h(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} h = \pi e^{y\frac{\pi}{2}},$$

also

$$\sqrt{2\pi} \left( \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh} \right\} \right) (y) \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{y\pi} \right] = \pi e^{y\frac{\pi}{2}},$$

d. h.

$$\pi = \sqrt{2\pi} \left( \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh} \right\} \right) (y) \cdot \left[ \frac{1}{2} (e^{-y\frac{\pi}{2}} + e^{y\frac{\pi}{2}}) \right] = \sqrt{2\pi} \left( \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh} \right\} \right) (y) \cdot \cosh \left( y\frac{\pi}{2} \right).$$

---

Nun sind wir offensichtlich in der Situation des Satzes 1.12, und es folgt, dass

$$\sigma(\Gamma) = \overline{\left\{ \frac{\pi}{\cosh(y \cdot \pi/2)} : y \in \mathbb{R} \right\}} = [0, \pi].$$

□

Wie die beschränkten kontinuierlichen Hankel-Operatoren  $\Gamma_k : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  mit Hankel-Operatoren auf  $H^2(\mathbb{R})$  bzw. auf  $H^2$  zusammenhängen, erklärt der folgende

**2.14 Satz:** *Es sei  $k \in \mathcal{D}'(0, \infty)$  derart, dass  $\Gamma_k : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  ein beschränkter kontinuierlicher Hankel-Operator ist. Dann gilt:*

- (i)  $\mathcal{F}^* \Gamma_k \mathcal{F}$  ist der Hankel-Operator  $S_\psi$  auf  $H^2(\mathbb{R})$ , wobei  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi|_{(0, \infty)} = k$ .
- (ii)  $G^* \mathcal{F}^* \Gamma_k \mathcal{F} G$  ist der Hankel-Operator  $S_{z\phi}$  auf  $H^2$ , wobei  $\phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \psi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , mit  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  und  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi|_{(0, \infty)} = k$ . Dabei ist  $G$  der unitäre Operator aus Satz 2.4.

**Beweis:** Zum Beweis von (ii) s. Peller [16], Theorem 8.9, S. 53. Zusammen mit Satz 2.6 folgt (i). □



# 3 Über die Hilbertsche Matrix

In diesem Kapitel werden Ergebnisse aus M. Rosenblums Arbeiten „On the Hilbert matrix, I“ [19] und „On the Hilbert matrix, II“ [20] aufgeführt, die im Laufe der Masterarbeit benötigt werden. Zunächst erläutern wir einige Elemente der sogenannten *Titchmarsh-Kodaira Theorie*.

## 3.1 Titchmarsh-Kodaira Theorie

In diesem Abschnitt folgen wir Weidmann [24] und Kodaira [9].

Es seien  $a$  und  $b$  Elemente in  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$  mit  $a < b$ . Für Funktionen  $p : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$  und  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $q$  und die erste Ableitung von  $p$  jeweils stetig in  $(a, b)$  sind, betrachten wir den Differentialausdruck

$$\tau[f] = -(p \cdot f')' + q \cdot f \tag{3.1}$$

und den *maximalen* durch  $\tau$  erzeugten Operator

$$T : D(T) \subset L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b), \quad T[f] = -(p \cdot f')' + q \cdot f, \tag{3.2}$$

wobei der Teilraum  $D(T)$  von  $L^2(a, b)$  aus allen Funktionen  $f$  mit den folgenden Eigenschaften besteht:

- (i)  $f \in L^2(a, b)$ ,
- (ii)  $f$  und  $pf'$  sind absolutstetig in  $(a, b)$ ,
- (iii)  $\tau[f] \in L^2(a, b)$ .

Ausgangspunkt aller weiteren Überlegungen ist die Differentialgleichung

$$\tau[f] = l \cdot f$$

mit komplexem Parameter  $l$ . Eine Funktion  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt eine *Lösung* von  $\tau[f] = l \cdot f$ , falls  $u$  und  $pu'$  absolutstetig sind und  $\tau[u] - l \cdot u = 0$  fast überall in  $(a, b)$ .

Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  Borel-messbar. Falls ein  $c \in (a, b)$  existiert, so dass  $f|_{(a,c)} \in L^2(a, c)$ , so sagen wir, dass  $f$  *links in  $L^2(a, b)$  liegt*. Entsprechend *liegt  $f$  rechts in  $L^2(a, b)$* , falls es ein  $c \in (a, b)$  gibt, so dass  $f|_{(c,b)} \in L^2(c, b)$ . Da diese Sprechweisen auf Lösungen von  $(\tau - l)u = 0$  angewendet werden, gilt dies stets für alle oder kein  $c \in (a, b)$ .

**3.1 Satz:** *Es sei  $\tau$  wie in (3.1) definiert. Dann gilt: Liegen für ein  $l_0 \in \mathbb{C}$  alle Lösungen von  $(\tau - l_0)u = 0$  rechts in  $L^2(a, b)$ , so liegen für alle  $l \in \mathbb{C}$  alle Lösungen von  $(\tau - l)u = 0$  rechts in  $L^2(a, b)$ . Das Entsprechende gilt für „links in  $L^2(a, b)$ “.*

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Weidmann, Satz 13.17, S. 54-55. □

**3.2 Satz** (Weylsche Alternative): *Es sei  $\tau$  wie in (3.1) definiert. Dann gilt entweder*

- (i) *für jedes  $l \in \mathbb{C}$  liegt jede Lösung  $u$  von  $(\tau - l)u = 0$  rechts in  $L^2(a, b)$ , oder*
- (ii) *für jedes  $l \in \mathbb{C}$  existiert mindestens eine Lösung von  $(\tau - l)u = 0$ , die nicht rechts in  $L^2(a, b)$  liegt. In diesem Fall existiert für jedes  $l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  genau eine (bis auf einen komplexen Faktor eindeutige) Lösung von  $(\tau - l)u = 0$ , die rechts in  $L^2(a, b)$  liegt.*

*Das Entsprechende gilt für „links in  $L^2(a, b)$ “.*

Wenn der Fall (i) in Satz 3.2 eintritt, so sagen wir, dass bei  $b$  (bzw.  $a$ ) der *Grenzkreisfall* vorliegt. Im Fall (ii) sagen wir, dass bei  $b$  (bzw.  $a$ ) der *Grenzpunktfall* vorliegt. Diese Benennung geht auf Hermann Weyl zurück, s. [26], Satz 1.

**Beweis des Satzes 3.2:** Ein Beweis findet sich bei Weidmann [24], Satz 13.18, S.55. □

In unserer Anwendung der Titchmarsh-Kodaira Theorie wird der Grenzpunktfall bei  $a = 0$  und bei  $b = \infty$  für  $\tau$  vorliegen. Daher werden wir für den Rest dieses Abschnittes annehmen, dass bei  $a$  und bei  $b$  jeweils der Grenzpunktfall vorliegt.

**3.3 Definition.** Es sei  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  ein offenes nichtleeres Intervall. Es seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{J})$ . Dann ist die *Wronski-Determinante* von  $f_1$  und  $f_2$  auf  $\mathcal{J}$  definiert durch

$$\mathcal{W} \{f_1(x), f_2(x)\} = f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x).$$

Unter einem *System von Fundamentallösungen* verstehen wir das System der zwei Lösungen  $s_1(\cdot, l)$  und  $s_2(\cdot, l)$  von  $\tau[u] = l \cdot u$ , so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $p(x) \mathcal{W} \{s_2(x, l), s_1(x, l)\} = 1$  für alle  $x \in (a, b)$ ,  $l \in \mathbb{C}$ ,
- (ii)  $s_k(x, \bar{l}) = \overline{s_k(x, l)}$  für  $k \in \{1, 2\}$  für alle  $x \in (a, b)$ ,  $l \in \mathbb{C}$ ,
- (iii) die Funktionen  $l \mapsto s_k(x, l)$  und  $l \mapsto \frac{\partial}{\partial x} s_k(x, l)$  sind analytisch in  $\mathbb{C}$  für alle  $x \in (a, b)$ , wobei  $k \in \{1, 2\}$ .

Solch ein System  $s_1, s_2$  von Lösungen erhalten wir z. B., indem wir  $\tau[u] = l \cdot u$  unter den Randbedingungen

$$s_1(c) = s_2'(c) = 0, \quad s_2(c) = p(c)s_1'(c) = 1, \quad (a < c < b),$$

lösen, wobei  $c \in (a, b)$  beliebig, aber fest gewählt ist. Dabei steht  $s_1(c) = 0$  für  $s_1(c, l) = 0$  für alle  $l \in \mathbb{C}$ ,  $s_2'(c) = 0$  für  $s_2'(c, l) = 0$  für alle  $l \in \mathbb{C}$  usw.

**3.4 Satz:** *Es sei  $\tau$  wie in (3.1) definiert. Liegt bei  $a$  und bei  $b$  jeweils der Grenzpunktfall vor, so ist der maximale von  $\tau$  erzeugte Operator  $T$  aus (3.2) selbstadjungiert.*

**Beweis:** Dies folgt aus Satz 13.21 bei Weidmann [24], S. 60-61. □

Wir definieren die *charakteristischen Funktionen*  $f_a, f_b : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $T$  durch

$$f_a(l) := - \lim_{x \rightarrow a} \frac{s_2(x, l)}{s_1(x, l)}, \quad f_b(l) := - \lim_{x \rightarrow b} \frac{s_2(x, l)}{s_1(x, l)}.$$

**3.5 Satz:** Die charakteristischen Funktionen  $f_a, f_b$  von  $T$  sind eindeutig bestimmt durch die Bedingungen

$$\int_a^c |s_2(x, l) + f_a(l) \cdot s_1(x, l)|^2 dx < \infty, \quad \int_c^b |s_2(x, l) + f_b(l) \cdot s_1(x, l)|^2 dx < \infty, \quad (a < c < b).$$

**Beweis:** Dies folgt aus Theorem 10.21 bei Stone [22], S. 496-498. □

Die charakteristische Matrix  $M(l) = \begin{pmatrix} M_{11}(l) & M_{12}(l) \\ M_{21}(l) & M_{22}(l) \end{pmatrix}$  ist für jedes  $l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} M_{11}(l) &= \frac{f_a(l)f_b(l)}{f_a(l) - f_b(l)}, \\ M_{12}(l) &= M_{21}(l) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_a(l) + f_b(l)}{f_a(l) - f_b(l)}, \\ M_{22}(l) &= \frac{1}{f_a(l) - f_b(l)}, \end{aligned}$$

wobei  $f_a$  und  $f_b$  die charakteristischen Funktionen von  $T$  sind.

**3.6 Lemma:** Die Funktionen  $M_{jk} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aus der charakteristischen Matrix von  $T$  sind jeweils holomorph, und es gilt

$$M_{jk}(\bar{l}) = \overline{M_{jk}(l)}, \quad l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad j, k = 1, 2.$$

**Beweis:** Für einen Beweis s. Kodaira [9], S. 925-926. □

**3.7 Lemma:** Für jede reelle Zahl  $\lambda$  und  $j, k \in \{1, 2\}$  existiert der Grenzwert

$$\rho_{jk}(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\lambda+\delta} \text{Im}\{M_{jk}(t + i\varepsilon)\} dt.$$

Die durch  $P(\lambda) = (\rho_{jk}(\lambda))_{j,k=1,2}$  definierte matrixwertige Funktion

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist rechtsstetig, und für reelle Zahlen  $\mu < \lambda$  ist die symmetrische Matrix  $P(\lambda) - P(\mu)$  positiv semidefinit.

**Beweis:** Dies folgt aus Theorem 1.13 bei Kodaira [9], S. 926-927. Der Beweis wird auf S. 929-932 geführt. □

Wir betrachten  $\lambda$ -messbare vektorwertige Funktionen  $\phi(\cdot) = (\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  und setzen

$$\|\phi\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^2 \phi_j(\lambda) \overline{\phi_k(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda),$$

wobei es sich bei den Integralen bzgl.  $d\rho_{jk}(\lambda)$  um Stieltjessche Integrale handelt. Da die Matrix  $dP(\lambda)$  positiv semidefinit ist, gilt  $\|\phi\|^2 \geq 0$ , und der Raum  $\mathcal{H} := \{\phi : \|\phi\| < \infty\}$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^2 \phi_j(\lambda) \overline{\psi_k(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda)$$

und Norm  $\|\phi\|_{\mathcal{H}} := \|\phi\|$ .

**3.8 Satz:** Es sei  $T$  wie in (3.2) definiert, und es sei  $s_1, s_2$  ein System von Fundamentallösungen der Differentialgleichung  $\tau[u] = l \cdot u$ . Bei  $a$  und bei  $b$  liege jeweils der Grenzpunktfall vor. Dann gilt:

(i) Der Operator  $\mathcal{U} : L^2(a, b) \rightarrow \mathcal{H}$ ,

$$(\mathcal{U}f)(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)) = \underset{\alpha \rightarrow a+, \beta \rightarrow b-}{\text{l.i.m.}} \left( \int_{\alpha}^{\beta} s_1(x, \lambda) f(x) dx, \int_{\alpha}^{\beta} s_2(x, \lambda) f(x) dx \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ist unitär, und der inverse Operator  $\mathcal{U}^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(a, b)$  ist gegeben durch

$$\mathcal{U}^{-1}(\phi_1, \phi_2)(x) = f(x) = \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^N \sum_{j,k=1}^2 s_j(x, \lambda) \phi_k(\lambda) d\rho_{jk}(\lambda), \quad x \in (a, b).$$

(ii) Für jedes  $f \in D(T)$  gilt

$$(T[f])(x) = \underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^N \sum_{j,k=1}^2 s_j(x, \lambda) \phi_k(\lambda) \cdot \lambda d\rho_{jk}(\lambda), \quad x \in (a, b);$$

insbesondere ist der Operator  $\mathcal{U} \circ T \circ \mathcal{U}^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  in „Diagonalform“, d. h.

$$(\mathcal{U} \circ T \circ \mathcal{U}^{-1})(\phi_1, \phi_2)(\lambda) = (\lambda \cdot \phi_1(\lambda), \lambda \cdot \phi_2(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dabei steht l.i.m. für „Limit in mean“, d. h. den Limes bzgl.  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  bzw. den Limes bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$ , und  $\rho_{jk}$  ist die Funktion aus Lemma 3.7,  $j, k = 1, 2$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Kodaira [9], Theorem 1.4, S. 927-928, verwiesen.  $\square$

## 3.2 Über die Whittaker-Funktionen M und W

Schreibe  $-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ . Zunächst definieren wir für Parameter  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ , die hypergeometrische Funktion  ${}_1F_1$  durch

$${}_1F_1(a; b; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!},$$

wobei  $(\alpha)_{\nu} = \Gamma(\alpha + \nu) / \Gamma(\alpha) = \prod_{j=0}^{\nu-1} (\alpha + j)$  für  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$  und  $\nu \in \mathbb{N}_0$  das Pochhammer-Symbol bezeichne und  $\Gamma$  die Gammafunktion. Ist  $\alpha \in (-\mathbb{N}_0)$  und  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  eine beliebige Folge von Zahlen in  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$  mit  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  für  $n \rightarrow \infty$ , so setzen wir  $(\alpha)_{\nu} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha_n + \nu)}{\Gamma(\alpha_n)} \in \mathbb{R}$  für jedes fest gewählte  $\nu \in \mathbb{N}_0$ . Dies ist möglich, weil sämtliche Pole der Gammafunktion von erster Ordnung sind, und offensichtlich unabhängig von der betrachteten Folge  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Die Beweise der Sätze 3.9 und 3.10 habe ich ohne Vorlage aus irgendeiner Veröffentlichung erstellt.

**3.9 Satz:** (i) Für Parameter  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ , ist die hypergeometrische Funktion  $z \mapsto {}_1F_1(a; b; z)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Zudem gilt

$${}_1F_1''(a; b; x) + \left(\frac{b}{x} - 1\right) {}_1F_1'(a; b; x) - \frac{a}{x} {}_1F_1(a; b; x) = 0, \quad x > 0.$$

Dabei ist  ${}_1F_1'(a; b; x) = (d/dx) {}_1F_1(a; b; x)$ .

- (ii) Für Parameter  $b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , ist die Funktion  $a \mapsto {}_1F_1(a; b; z)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .
- (iii) Für Parameter  $a, z \in \mathbb{C}$  ist die Funktion  $b \mapsto {}_1F_1(a; b; z)$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ . Sämtliche Polstellen von  ${}_1F_1(a; \cdot; z)$  in den Punkten  $b = 0, -1, -2, \dots$  sind jeweils von erster Ordnung. Insbesondere ist  $b \mapsto {}_1F_1(a; b; z)$  meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:**

- (i) Man beachte, dass sämtliche Polstellen der Gammafunktion von erster Ordnung sind. Ist  $a \in -\mathbb{N}_0$  und  $a + n \in -\mathbb{N}_0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\Gamma(a + n)/\Gamma(a) \in \mathbb{R}$ , und für hinreichend große  $N \in \mathbb{N}$  gilt  $a + N \notin -\mathbb{N}_0$  und  $\Gamma(a + N)/\Gamma(a) = 0$ .

Es seien  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{(b)_n}{(a)_n} \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+n)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+n+1)} \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{b+n} \frac{1}{n+1} \right| = 0,$$

also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!}$  gleich Unendlich.  ${}_1F_1(a; b; \cdot)$  ist also holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ ; insbesondere können wir Ableitungen beliebiger Ordnung mit dem Summenzeichen vertauschen. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \frac{d^2}{dx^2} {}_1F_1(a; b; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

für alle  $x > 0$ . Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} &{}_1F_1''(a; b; x) + \left(\frac{b}{x} - 1\right) {}_1F_1'(a; b; x) - \frac{a}{x} {}_1F_1(a; b; x) \\ &= \frac{1}{x} \left[ b \cdot \frac{(a)_1}{(b)_1} - a \right] + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[ \frac{(a)_{n+2}}{(b)_{n+2}} \frac{1}{n!} + b \cdot \frac{(a)_{n+2}}{(b)_{n+2}} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{(a)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{1}{n!} - a \cdot \frac{(a)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[ b \cdot \frac{a}{b} - a \right] + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{(a)_{n+1}}{(n+1)! (b)_{n+2}} [(n+1)(a+n+1) + b(a+n+1) \\ &\quad - (n+1)(b+n+1) - a(b+n+1)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{(a)_{n+1}}{(n+1)! (b)_{n+2}} [a(n+1) + (n+1)^2 + ab + b(n+1) - b(n+1) - (n+1)^2 - ab - a(n+1)] \\ &= 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

- (ii) Es seien  $b \in -\mathbb{N}_0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , beliebig, aber fest gewählt. Betrachte die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der jeweils auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(a) = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Punkt (i) dürfen wir für alle  $a \in \mathbb{C}$  die Grenzfunktion

$$a \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!}$$

definieren. Es sei  $a_0 \in \mathbb{C}$ . Wähle  $0 < \rho < 1$ . Die offene Kreisscheibe um  $a_0$  mit Radius  $\rho$ ,  $K_\rho(a_0) \subset \mathbb{C}$ , ist eine offene Umgebung von  $a_0$ , so dass  $K := \overline{K_\rho(a_0)}$  kompakt ist. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Setze  $R := \max_{a \in K} |a| > 0$ . Da nach Punkt (i) der Konvergenzradius der Potenzreihe

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(R)_m}{(b)_m} \frac{z^m}{m!}$  als Funktion von  $z$  gleich Unendlich ist, konvergiert  ${}_1F_1(R; b; z)$  absolut, also existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\min_{a \in K} \operatorname{Re}(a + N) > 0$ , so dass

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(R+m)}{\Gamma(R)} \right| \left| \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \right| \frac{|z^m|}{m!} < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ . Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{a \in K} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!} - \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!} \right| \\ & \leq \sup_{a \in K} \sum_{m=n+1}^{\infty} |a(a+1)\dots(a+m-1)| \cdot \left| \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \right| \frac{|z^m|}{m!} \\ & \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} R(R+1)\dots(R+m-1) \cdot \left| \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \right| \frac{|z^m|}{m!} \\ & < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $n \geq N$ . Falls  $\hat{a}$  in  $K \cap (-\mathbb{N}_0)$  ist, so gilt wegen  $\operatorname{Re}(\hat{a} + n) > 0$ , dass

$$\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\hat{a}+m)}{\Gamma(\hat{a})} \cdot \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+m)} \frac{z^m}{m!} \right| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} 0 \right| = 0$$

für alle  $n \geq N$ . Wir haben gezeigt, dass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  lokal gleichmäßig gegen  ${}_1F_1(\cdot; b; z)$  konvergiert. Trivialerweise ist  $\mathbb{C}$  eine offene Teilmenge von sich selbst. Insgesamt folgt mit dem Satz von Weierstraß, dass  $a \mapsto {}_1F_1(a; b; z)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist.

- (iii) Sind  $a, b \in \mathbb{C}$  fest gewählt, so ist die Funktion  $z \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , denn wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1}}{(a)_n} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+n+1)} \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{b+n} \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

ist der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  gleich Unendlich. Insbesondere konvergiert die Reihe  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  für feste  $a, b, z \in \mathbb{C}$  absolut, und wir dürfen die Grenzfunktion  $b \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  punktweise auf  $\mathbb{C}$  definieren.

Es sei  $b_0 \in \mathbb{C}$ . Wähle  $\rho > 0$  beliebig, aber fest. Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius  $\rho$  um  $b_0$ ,  $K := \overline{K_\rho(b_0)} \subset \mathbb{C}$ , als Umgebung von  $b_0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Definiere  $\hat{b} := b_0 - \rho \in K$ . Nach der Bemerkung zu Beginn des Beweises von (iii) und wegen der Kompaktheit von  $K$  können wir  $N \in \mathbb{N}$  so groß wählen, dass

$$\left. \begin{aligned} & \min_{b \in K} \operatorname{Re}(b+n) > \max\{1, 2\rho\}, \quad \left| \frac{\operatorname{Im}(b_0)}{\operatorname{Re}(b_0)+n} \right| < 1, \quad \left| -\rho + \rho \cdot \frac{\frac{b_0+1}{n} + 1}{\left| \frac{b_0+1}{n} + 1 \right|} \right| < \sqrt{2}\rho \\ & \text{und} \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} |(a)_m| \frac{1}{|\Gamma(\hat{b}+m)|} \frac{|z|^m}{m!} < \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

für alle  $n \geq N$ . Nach (\*) gibt es eine Konstante  $C'' > 0$ , so dass

$$\max_{b \in K} \frac{1}{|\Gamma(b+N)|} \leq \frac{C''}{|\Gamma(\hat{b}+N)|}; \quad (3.3)$$

man beachte, dass  $1/\Gamma$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist, und die stetige Funktion  $1/|\Gamma(\cdot+N)|$  auf der kompakten Menge  $K$  ihr Maximum annimmt. Aus elementaren geometrischen Überlegungen, nämlich der Bestimmung des kleinsten Abstands zwischen einem Punkt und einem Kreis in der Ebene, folgt sofort, dass

$$\max_{b \in K} \frac{1}{|b+N+k|} = \frac{1}{\text{dist}(0, K+N+k)} = \frac{1}{|b_0+N+k|-\rho}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.4)$$

wobei  $\text{dist}(0, K+N+k) = \inf_{b \in K} \sqrt{(\text{Re}(b)+N+k)^2 + \text{Im}(b)^2}$ . Der Punkt in  $K+N+k$ , für den das Maximum in obiger Gleichung angenommen wird, ist  $\left(1 - \frac{\rho}{|b_0+N+k|}\right)(b_0+N+k)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |\hat{b}+N+k| &\leq \left| \left(1 - \frac{\rho}{|b_0+N+k|}\right)(b_0+N+k) \right| + \left| (\hat{b}+N+k) - \left(1 - \frac{\rho}{|b_0+N+k|}\right)(b_0+N+k) \right| \\ &= |b_0+N+k| - \rho + \delta(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{1}{|b_0+N+k|-\rho} \leq \frac{1}{|\hat{b}+N+k|-\delta(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.5)$$

wobei nach der Taylorentwicklung des Arkustanges um Null gilt, dass

$$\begin{aligned} \delta(k) &:= \left| (\hat{b}+N+k) - \left(1 - \frac{\rho}{|b_0+N+k|}\right)(b_0+N+k) \right| \\ &= \left| (\hat{b}-b_0) - \left(-\frac{\rho}{|b_0+N+k|}(b_0+N+k)\right) \right| \\ &\leq \rho \cdot \left| \arg(\hat{b}-b_0) - \arg\left(-\frac{\rho}{|b_0+N+k|}(b_0+N+k)\right) \right| \\ &= \rho \cdot \left| \arg(-\rho) - \left[\pi + \arctan\left(\frac{\text{Im}(b_0)}{\text{Re}(b_0)+N+k}\right)\right] \right| \\ &= \rho \cdot \left| \pi - \pi - \frac{\text{Im}(b_0)}{\text{Re}(b_0)+N+k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \right| \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dabei folgt die Tatsache, dass  $-\frac{\rho}{|b_0+N+k|}(b_0+N+k)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  in der linken Halbebene liegt, aus der Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \hat{b}+n - \left(1 - \frac{\rho}{|b_0+n|}\right)(b_0+n) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\rho + \rho \cdot \frac{b_0+n}{|b_0+n|} \right\} = -\rho + \rho \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b_0}{n} + 1}{\left|\frac{b_0}{n} + 1\right|} = 0$$

und der Wahl von  $N$  in (\*). Wir betrachten nun die Folge  $(C'_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$C'_k := \frac{|\hat{b}+N+k|}{|\hat{b}+N+k|-\delta(k)} = 1 + \frac{\delta(k)}{|\hat{b}+N+k|-\delta(k)} \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.6)$$

Dann gilt wegen

$$\frac{\delta(k)}{|\hat{b}+N+k|-\delta(k)} = \frac{\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)}{|\hat{b}+N+k|-\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)}{\mathcal{O}(k)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

dass ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  und eine Konstante  $\hat{C} > 0$  existieren derart, dass

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \left| \frac{\delta(m)}{|\hat{b}+N+m|-\delta(m)} \right| = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot m^2 \cdot \frac{\delta(m)}{|\hat{b}+N+m|-\delta(m)}$$

$$\begin{aligned} &\leq (\hat{C} + \varepsilon) \cdot \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\ &< \varepsilon \cdot (\hat{C} + \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle  $k \geq k_0$ . Wir haben gezeigt, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(k)}{|\hat{b}+N+k|-\delta(k)}$  absolut konvergiert, also folgt mit Satz 1.36, dass das unendliche Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} C'_k$  absolut konvergiert, etwa gegen

$$C' := \prod_{k=0}^{\infty} C'_k \in [1, \infty) \quad \text{mit} \quad C' \geq C'_0 \cdot \dots \cdot C'_k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.7)$$

denn  $C'_k \geq 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Demnach gilt mit (3.3)–(3.7), dass

$$\begin{aligned} \max_{b \in K} \frac{1}{|\Gamma(b+N+k)|} &\leq \max_{b \in K} \frac{1}{|\Gamma(b+N)|} \max_{b \in K} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|b+N+j|} \\ &\leq \max_{b \in K} \frac{1}{|\Gamma(b+N)|} \prod_{j=0}^{k-1} \max_{b \in K} \frac{1}{|b+N+j|} \\ &\leq \frac{C''}{|\Gamma(\hat{b}+N)|} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|\hat{b}+N+j|-\delta(j)} \\ &= \frac{C''}{|\Gamma(\hat{b}+N)|} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{C'_j}{|\hat{b}+N+j|} \\ &\leq C' \cdot C'' \frac{1}{|\Gamma(\hat{b}+N)|} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|\hat{b}+N+j|} \\ &= C \cdot \frac{1}{|\Gamma(\hat{b}+N+k)|}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

wobei  $C := C' \cdot C'' > 0$ ; im Fall  $k = 0$  folgt mit (3.3) und (3.7), dass

$$\max_{b \in K} \frac{1}{|\Gamma(b+N)|} \leq \frac{C''}{|\Gamma(\hat{b}+N)|} \leq \frac{C}{|\Gamma(\hat{b}+N)|}.$$

Zusammen mit (\*) folgt, dass

$$\begin{aligned} \sup_{b \in K} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!} - \sum_{m=0}^n \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!} \right| &\leq \sup_{b \in K} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\Gamma(b+m)|} |(a)_m| \frac{|z|^m}{m!} \\ &\leq C \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\Gamma(\hat{b}+m)|} |(a)_m| \frac{|z|^m}{m!} \\ &< C \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $n \geq N$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass die durch

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(b) := \sum_{m=0}^n \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!},$$

definierte Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der jeweils auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen  $f_n$  lokal gleichmäßig gegen  $b \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  konvergiert. Trivialerweise ist  $\mathbb{C}$  eine offene Teilmenge von sich selbst. Mit dem Satz von Weierstraß folgt nun, dass die Funktion  $b \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+m)} (a)_m \frac{z^m}{m!}$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist. Multipliziert mit der meromorphen Funktion  $b \mapsto \Gamma(b)$  erhalten wir die hypergeometrische Funktion  ${}_1F_1(a; \cdot; z)$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Es seien  $X_M := \{-(m+1)/2 : m \in \mathbb{N}_0\}$  und  $X_W := \{n/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ . Wir definieren für Parameter  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$ , die Funktion

$$M_{\kappa,\mu} : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}, \quad M_{\kappa,\mu}(z) := e^{-z/2} z^{\frac{1}{2}+\mu} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z\right), \quad (3.8)$$

sowie für Parameter  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$ , die Funktion

$$W_{\kappa,\mu} : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}, \quad W_{\kappa,\mu}(z) := \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \kappa)} M_{\kappa,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)} M_{\kappa,-\mu}(z). \quad (3.9)$$

$M_{\kappa,\mu}$  und  $W_{\kappa,\mu}$  sind die sogenannten *Whittaker-Funktionen*.

**3.10 Satz:** (i) Für Parameter  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$  bzw.  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$  sind die Whittaker-Funktionen  $M_{\kappa,\mu}$  bzw.  $W_{\kappa,\mu}$  jeweils holomorph in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^-$ . Zudem erfüllen  $M_{\kappa,\mu}$  und  $W_{\kappa,\mu}$  für die oben festgelegten Parameter jeweils die Differentialgleichung

$$Y''(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) Y(x) = 0, \quad x > 0. \quad (3.10)$$

(ii) Für Parameter  $z \in \mathbb{C}^-$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$  bzw.  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$  sind die Funktionen  $\kappa \mapsto M_{\kappa,\mu}(z)$  bzw.  $\kappa \mapsto W_{\kappa,\mu}(z)$  jeweils holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

(iii) Für Parameter  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}^-$  sind die Funktionen

$$\mathbb{C} \setminus X_M \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mu \mapsto M_{\kappa,\mu}(z), \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus X_W \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mu \mapsto W_{\kappa,\mu}(z),$$

jeweils holomorph. Sämtliche Polstellen von  $M_{\kappa,\cdot}(z)$  in den Punkten  $\mu \in X_M$  sind von erster Ordnung. Insbesondere ist  $\mu \mapsto M_{\kappa,\mu}(z)$  für die oben festgelegten Parameter meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Nach Definition gilt  $z^\mu = e^{\mu \cdot \log(z)}$ , wobei  $\log$  den Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichne. Daher ist  $z \in \mathbb{C}^-$  vorauszusetzen. Für Parameter  $z \in \mathbb{C}^-$ ,  $\kappa \in \mathbb{C}$ , wissen wir aus Punkt (iii) des Satzes 3.9, dass die Funktion  $\mu \mapsto {}_1F_1(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z)$  Polstellen genau für  $\mu \in X_M$  besitzt. Bekanntlich besitzt die Gammafunktion Polstellen genau in  $0, -1, -2, \dots$ , die alle von erster Ordnung sind. Dies rechtfertigt die obige Definition der Whittaker-Funktionen  $M$  und  $W$ .

(i) Es seien  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$ . Dann ist mit den Abbildungen

$$z \mapsto e^{-z/2}, \quad z \mapsto z^{\frac{1}{2}+\mu} = e^{(\frac{1}{2}+\mu)\log(z)} \quad \text{und} \quad z \mapsto {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z\right)$$

auch die Whittaker-Funktion  $z \mapsto M_{\kappa,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1}{2}+\mu} {}_1F_1(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z)$  holomorph in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^-$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} M_{\kappa,\mu}(x) &= -\frac{1}{2} M_{\kappa,\mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu}{x} M_{\kappa,\mu}(x) + e^{-x/2} x^{\frac{1}{2}+\mu} {}_1F_1'\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; x\right), \\ \frac{d^2}{dx^2} M_{\kappa,\mu}(x) &= M_{\kappa,\mu}(x) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{x} - \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) + e^{-x/2} x^{\frac{1}{2}+\mu} \left\{ -\frac{\frac{1}{2} + \mu - \kappa}{x} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; x\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1 + 2\mu}{x} - 1\right) {}_1F_1'\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; x\right) + {}_1F_1''\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; x\right) \right\} \\ &= M_{\kappa,\mu}(x) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{x} - \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right), \quad x > 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Punkt (i) des Satzes 3.9 mit  $a := \frac{1}{2} + \mu - \kappa$  und  $b := 1 + 2\mu$  verwendet haben. Insbesondere gilt für Parameter  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$ , dass mit den Abbildungen

$$z \mapsto \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(z) \quad \text{und} \quad z \mapsto \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(z)$$

auch die Whittaker-Funktion  $z \mapsto W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(z)$  holomorph in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^-$  ist, und

$$\begin{aligned} & W''_{\kappa, \mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) W_{\kappa, \mu}(x) \\ &= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} \left\{ M''_{\kappa, \mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2}\right) M_{\kappa, \mu}(x) \right\} \\ & \quad + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} \left\{ M''_{\kappa, -\mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{x} + \frac{\frac{1}{4} - (-\mu)^2}{x^2}\right) M_{\kappa, -\mu}(x) \right\} \\ &= 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

(ii) Für Parameter  $z \in \mathbb{C}^-$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$  sind nach Punkt (ii) des Satzes 3.9 die Abbildungen

$$\kappa \mapsto \frac{1}{2} + \mu - \kappa \quad \text{und} \quad a \mapsto {}_1F_1(a; 1 + 2\mu; z)$$

holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , also trifft dies auch auf die Hintereinanderschaltung beider Funktionen und schließlich auf  $\kappa \mapsto M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1}{2} + \mu} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z\right)$  zu. Die Behauptung für  $\kappa \mapsto W_{\kappa, \mu}(z)$  mit  $z \in \mathbb{C}^-$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$  folgt analog mit (3.9).

(iii) Es seien  $z \in \mathbb{C}^-$  und  $\kappa \in \mathbb{C}$  beliebig, aber fest gewählt. Im Beweis von (ii) des Satzes 3.9 haben wir gezeigt, dass die Potenzreihe  $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}$  für feste  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_M$  und  $z \in \mathbb{C}^-$  absolut konvergiert. Insbesondere dürfen wir die Grenzfunktion  $\mu \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}$  definieren. Offenbar sind die durch

$$f_n(\mu) := \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

definierten Funktionen  $f_n$  jeweils holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

Es sei  $\mu_0 \in \mathbb{C}$ . Wähle  $0 < \rho < 1$ . Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius  $\rho$  um  $\mu_0$ ,  $K := \overline{K_\rho(\mu_0)} \subset \mathbb{C}$ , als Umgebung von  $\mu_0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\rho' > 0$ , so dass  $K \cup \{1 + 2\mu : \mu \in K\} \cup \{\frac{1}{2} + \mu - \kappa : \mu \in K\} \subset K_{\rho'}(\mu_0)$ . Setze  $K' := \overline{K_{\rho'}(\mu_0)}$  und  $R := \max_{b \in K'} |b| > 0$ . Nach dem Beweis von Punkt (iii) des Satzes 3.9 existieren eine Konstante  $C > 0$  und ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\begin{aligned} & \sup_{\mu \in K} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!} - \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!} \right| \\ & \leq \sup_{\mu \in K} \sum_{m=n+1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \right| \frac{1}{|\Gamma(1+2\mu+m)|} \frac{|z|^m}{m!} \\ & \leq \sup_{b \in K'} \sum_{m=n+1}^{\infty} (R)_m \frac{1}{|\Gamma(b+m)|} \frac{|z|^m}{m!} \\ & \leq C \cdot \sup_{b \in K'} \sum_{m=n+1}^{\infty} (R)_m \frac{1}{|\Gamma(\hat{b}+m)|} \frac{|z|^m}{m!} < C\varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $n \geq N$ , wobei  $\hat{b} := \mu_0 - \rho' \in K'$ . Wir haben gezeigt, dass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der jeweils auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen  $f_n$  lokal gleichmäßig gegen  $\mu \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}$  konvergiert. Trivialerweise ist  $\mathbb{C}$  eine offene Teilmenge von sich selbst. Mit dem Satz von Weierstraß folgt nun, dass die Funktion  $\mu \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist. Daher ist  $\mu \mapsto M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1}{2}+\mu} \Gamma(1+2\mu) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)_m \frac{1}{\Gamma(1+2\mu+m)} \frac{z^m}{m!}$  meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , mit Polen erster Ordnung genau für  $\mu \in X_M$ . Analog folgt, dass  $\mu \mapsto M_{\kappa, -\mu}$  meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist, mit Polen erster Ordnung genau für  $\mu \in -X_M = \{(m+1)/2 : m \in \mathbb{N}_0\}$ . Da die Gammafunktion Polstellen erster Ordnung genau in  $0, -1, -2, \dots$  besitzt, folgt (iii).  $\square$

Ist speziell  $\kappa = 1/2$ , so gilt wegen  ${}_1F_1(0; 1; z) = 1$ , dass  $M_{\frac{1}{2}, 0}(z) = z^{1/2}e^{-z/2}$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^-$ . Zudem folgt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} W_{\frac{1}{2}, \mu}(z) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu)} \lim_{\mu \rightarrow 0} M_{\frac{1}{2}, \mu}(z) + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)} \lim_{\mu \rightarrow 0} M_{\frac{1}{2}, \mu}(z) \\ &= \frac{1}{2} z^{1/2} e^{-z/2} + \frac{1}{2} z^{1/2} e^{-z/2} \\ &= z^{1/2} e^{-z/2}, \quad z \in \mathbb{C}^-. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$W_{\frac{1}{2}, 0}(z) := \lim_{\mu \rightarrow 0} W_{\frac{1}{2}, \mu}(z) = z^{1/2} e^{-z/2} = M_{\frac{1}{2}, 0}(z), \quad z \in \mathbb{C}^-. \quad (3.11)$$

**3.11 Satz:** *Es sei  $\kappa \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:*

- (i) *Für jedes fest gewählte  $z \in \mathbb{C}^-$  lässt sich die Funktion  $W_{\kappa, \cdot}(z)$  aus Satz 3.10 (iii) analytisch fortsetzen in*

$$W_{\kappa, m/2}(z) := \lim W_{\kappa, \mu}(z), \quad m \in \mathbb{Z},$$

*wobei der Limes über eine beliebige Folge  $\mu \rightarrow m/2$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$ , verläuft. Die so entstandene auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion bezeichnen wir wieder mit  $W_{\kappa, \cdot}(z)$ .*

- (ii) *Die Funktion  $W_{\kappa, \mu}(\cdot)$  aus Satz 3.10 (i) lässt sich analytisch zu einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}^-$  fortsetzen, für die  $\mu$  aus  $X_W$  sein darf. Diese Funktion bezeichnen wir wieder mit  $W_{\kappa, \mu}(\cdot)$ ; sie erfüllt auf  $(0, \infty)$  die Differentialgleichung (3.10).*

*Insbesondere gilt  $W_{\kappa, -\mu}(z) = W_{\kappa, \mu}(z)$  für fest gewählte  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}^-$ , d. h.  $W_{\kappa, \cdot}(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine gerade Funktion.*

**Beweis:** Für einen Beweis von (i) und (ii) sei auf Buchholz [1], S. 19-23, verwiesen. Dort wird der Grenzwert

$$\lim W_{\kappa, \mu}(z), \quad m \in \mathbb{Z},$$

über eine beliebige Folge  $\mu \rightarrow m/2$ ,  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$ , für fest gewählte  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}^-$ , sogar explizit berechnet.

Dass  $W_{\kappa, -\mu}(z) = W_{\kappa, \mu}(z)$  für fest gewählte  $\kappa \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}^-$ , gilt, folgt für  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$  unmittelbar aus (3.9) und für  $\mu \in X_W$  mit dem Grenzübergang aus (i).  $\square$

**3.12 Satz:** (i) Falls  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $u \in \mathbb{C} \setminus X_M$ , so gilt

$$M_{\kappa,u}(x) = x^{u+1/2} (1 + \mathcal{O}(x)) \quad \text{für } x \rightarrow 0+.$$

Sind  $\kappa, u \in \mathbb{C}$  derart, dass  $u - \kappa \neq -1/2, -3/2, \dots$ , so gilt

$$M_{\kappa,u}(x) \sim \frac{\Gamma(1+2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}+u-\kappa)} e^{x/2} x^{-\kappa} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

(ii) Falls  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $u \in \mathbb{C} \setminus X_W$  mit  $0 \leq \operatorname{Re}(u) < 1/2, u \neq 0$ , so gilt

$$W_{\kappa,u}(x) = \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}+u-\kappa)} x^{-u+1/2} + \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-u-\kappa)} x^{u+1/2} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}-\operatorname{Re}(u)}\right) \quad \text{für } x \rightarrow 0+.$$

Für beliebige  $\kappa, u \in \mathbb{C}$  gilt

$$W_{\kappa,u}(x) \sim e^{-x/2} x^\kappa \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

**Beweis:**

(i) Es seien  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $u \in \mathbb{C} \setminus X_M$ . Aus der Darstellung (3.8) folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} \frac{M_{\kappa,u}(x)}{x^{u+1/2}} - 1 &= e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+u-\kappa; 1+2u; x\right) - 1 \\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) (1 + \mathcal{O}(x)) - 1 \\ &= \mathcal{O}(x) \quad \text{für } x \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Für den Beweis des asymptotischen Verhaltens von  $M_{\kappa,u}$  für große  $x$  sei auf Buchholz [1], S. 90-91, verwiesen, insbesondere auf Gleichung (3) auf Seite 91.

(ii) Es seien  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $u \in \mathbb{C} \setminus X_W$  mit  $0 \leq \operatorname{Re}(u) < 1/2, u \neq 0$ . Aus der Darstellung (3.9) und (i) folgt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} W_{\kappa,u}(x) &= \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-u-\kappa)} M_{\kappa,u}(x) + \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}+u-\kappa)} M_{\kappa,-u}(x) \\ &= \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-u-\kappa)} x^{u+1/2} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}+u}\right) + \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}+u-\kappa)} x^{-u+1/2} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}-u}\right) \\ &= \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}-u-\kappa)} x^{u+1/2} + \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2}+u-\kappa)} x^{-u+1/2} + \mathcal{O}\left(x^{\frac{3}{2}-\operatorname{Re}(u)}\right) \quad \text{für } x \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Für den Beweis des asymptotischen Verhaltens von  $W_{\kappa,u}$  für große  $x$  sei auf Buchholz [1], S. 90, verwiesen, insbesondere auf Gleichung (1b).  $\square$

Definiere die entlang der positiven reellen Achse geschlitzte Ebene  $\mathbb{C}^{(-)} := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

**3.13 Satz:** Es seien  $p \leq 1/2$  und  $x > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Dann gilt:

$$(i) \overline{W_{p,u}(x)} = W_{p,\bar{u}}(x) \quad \text{und} \quad \overline{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-p-u)}{\Gamma(1-2u)} M_{p,-u}(x)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-p-\bar{u})}{\Gamma(1-2\bar{u})} M_{p,-\bar{u}}(x) \quad \text{für jedes } u \in \mathbb{C}^{(-)}.$$

$$(ii) W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

$$(iii) W_{p,-\sqrt{|\lambda|}}(x), \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-p+\sqrt{|\lambda|})}{\Gamma(1+2\sqrt{|\lambda|})} M_{p,\sqrt{|\lambda|}}(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \lambda < 0.$$

(iv) Die Funktion

$$u \mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \frac{d}{dx} M_{p,-u}(x)$$

ist holomorph in  $\mathbb{C}^{(-)}$ , und die Funktion

$$u \mapsto \frac{d}{dx} W_{p,u}(x)$$

ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

**Beweis:** Man beachte, dass nach dem Beweis von Satz 3.10 (iii) die Funktion

$$\mu \mapsto \frac{1}{\Gamma(1 + 2\mu)} M_{\kappa,\mu}(z)$$

für fest gewählte  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}^-$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist.

Es seien nun  $p \leq 1/2$  und  $x > 0$  beliebig, aber fest gewählt.

(i) Dies folgt unmittelbar aus dem Aufbau der Whittaker-Funktionen und der Eigenschaft  $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ .

(ii) Nach Satz 3.11 ist  $W_{p,\cdot}(x)$  eine gerade Funktion, und mit (i) folgt, dass

$$\overline{W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x)} = W_{p,-i\sqrt{\lambda}}(x) = W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x)$$

für jedes  $\lambda > 0$ , also gilt  $W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x) \in \mathbb{R}$ .

(iii) Es sei  $\lambda < 0$  beliebig, aber fest gewählt. Offensichtlich gilt  $\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{|\lambda|}$ , und zusammen mit (i) folgt, dass

$$\overline{W_{p,-\sqrt{|\lambda|}}(x)} = W_{p,-\sqrt{|\lambda|}}(x) = W_{p,-\sqrt{|\lambda|}}(x)$$

und

$$\overline{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p + \sqrt{|\lambda|}\right)}{\Gamma(1 + 2\sqrt{|\lambda|})} M_{p,\sqrt{|\lambda|}}(x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p + \sqrt{|\lambda|}\right)}{\Gamma(1 + 2\sqrt{|\lambda|})} M_{p,\sqrt{|\lambda|}}(x).$$

(iv) Völlig analog zur Rechnung im Beweis von Lemma 3.15 (iii) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \frac{d}{dx} M_{p,-u}(x) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \left\{ -\frac{1}{2} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} M_{p,-u}(x) \right. \\ & \quad \left. + e^{-x/2} x^{-u+1/2} \frac{d}{dx} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - u - p; 1 - 2u; x\right) \right\} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \left\{ -\frac{1}{2} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u - p}{1 - 2u} e^{-x/2} x^{-u+1/2} \right. \\ & \quad \left. \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \left(-u + \frac{1}{2}\right) - \left(p - \frac{1}{2}\right); 1 + 2\left(-u + \frac{1}{2}\right); x\right) \right\} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \left\{ -\frac{1}{2} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u - p}{1 - 2u} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{p-1/2,-u+1/2}(x) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p,-u}(x) \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{1}{2} - u - p \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 + 2(-u + 1/2))} M_{p-1/2, -u+1/2}(x) \Big\}$$

für alle  $u \in \mathbb{C}^{(-)}$ , so dass  $1 - 2u \neq 0, -1, -2, \dots$  und  $2 - 2u \neq 0, -1, -2, \dots$ , und durch analytische Fortsetzung von

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p, -u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p, -u}(x) \\ & + \left( \frac{1}{2} - u - p \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 + 2(-u + 1/2))} M_{p-1/2, -u+1/2}(x) \Big\} \end{aligned}$$

sogar für alle  $u \in \mathbb{C}^{(-)}$ . Da wir bereits wissen, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} u &\mapsto \frac{\frac{1}{2} - u}{x}, \\ u &\mapsto \frac{1}{2} - p - u, \\ u &\mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p, -u}(x), \\ u &\mapsto \left( \frac{1}{2} - u - p \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 + 2(-u + 1/2))} M_{p-1/2, -u+1/2}(x), \end{aligned}$$

jeweils holomorph in  $\mathbb{C}^{(-)}$  sind, trifft dies auch auf die Funktion

$$u \mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \frac{d}{dx} M_{p, -u}(x)$$

zu.

Nach Gleichung (43b) auf S. 47 bei Buchholz [1] gilt

$$\frac{d}{dx} \left\{ e^{-x/2} \cdot \frac{W_{p,u}(x)}{x^{-u+1/2}} \right\} = -e^{-x/2} \cdot \frac{W_{p+1/2, u-1/2}(x)}{x^{1-u}}$$

für alle  $u \in \mathbb{C}$ . Mit der Produktregel folgt, dass

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ (e^{-x/2} x^{u-1/2}) \cdot W_{p,u}(x) \right\} \\ & = \left\{ -\frac{1}{2} e^{-x/2} x^{u-1/2} + \left( u - \frac{1}{2} \right) e^{-x/2} x^{u-3/2} \right\} W_{p,u}(x) + e^{-x/2} x^{u-1/2} \cdot \frac{d}{dx} W_{p,u}(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dx} W_{p,u}(x) = \frac{1}{2} W_{p,u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} W_{p,u}(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} W_{p+1/2, u-1/2}(x)$$

für alle  $u \in \mathbb{C}$ ; mithin ist

$$u \mapsto \frac{d}{dx} W_{p,u}(x)$$

als Summe holomorpher Funktionen selbst holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . □

### 3.3 Über einen Differentialausdruck zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt verwenden wir den folgenden auf  $\mathbb{C}^{(-)} = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  holomorphen Ast der Wurzelfunktion  $(\cdot)^{1/2}$ , der wie folgt definiert ist:

$$(l)^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\phi/2},$$

wobei  $l = r e^{i\phi} \in \mathbb{C}^{(-)}$ ,  $r > 0$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ . Wir bemerken, dass  $\{u = i \cdot (l)^{1/2} : l \in \mathbb{C}^{(-)}\} \subset \mathbb{H}_\ell$  gilt; dabei bezeichne  $\mathbb{H}_\ell = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$  die linke Halbebene.

In diesem gesamten Abschnitt sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Der Differentialausdruck  $\tau_p$  ist definiert durch

$$(\tau_p[y])(x) = - (x^2 y'(x))' - \left( px - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \right) y(x) \quad \text{fast überall in } (0, \infty), \quad (3.12)$$

wobei  $x \mapsto y(x)$  und  $x \mapsto x^2 y'(x)$  absolutstetig sind.

Wir suchen nach Lösungen des Eigenwertproblems  $\tau_p[y] = ly$ ,  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$ , via Ansatz. Falls  $y(x) = Y(x)/x$  die Eigenwertgleichung  $\tau_p[y] = ly$  erfüllt, so ist

$$0 = (x^2 y'(x))' + \left( px - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + l \right) y(x)$$

äquivalent zu

$$0 = Y''(x) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{p}{x} + \frac{1/4 + l}{x^2} \right) Y(x), \quad (3.13)$$

für  $x > 0$  fast überall. Wie wir bereits wissen, lösen die Whittaker-Funktionen  $M$  und  $W$  die Differentialgleichung (3.13). Definiere die Funktionen  $\alpha_p(\cdot, l)$  und  $\beta_p(\cdot, l)$  auf  $(0, \infty)$  durch

$$\alpha_p(x, l) := W_{p,u}(x)/x \quad \text{bzw.} \quad \beta_p(x, l) := \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p,-u}(x)/x,$$

wobei  $u = i \cdot (l)^{1/2}$ .

**3.14 Lemma:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Es seien  $l \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  und  $u = i \cdot (l)^{1/2} \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Dann gilt:*

(i)  $\alpha_p(\cdot, l) \notin L^2(0, 1)$ ,  $\alpha_p(\cdot, l) \in L^2(1, \infty)$ .

(ii)  $\beta_p(\cdot, l) \in L^2(0, 1)$ ,  $\beta_p(\cdot, l) \notin L^2(1, \infty)$ .

**Beweis:** Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt

$$\frac{M_{p,\pm u}(x)}{x^{\pm u + 1/2}} = e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \pm u - p; 1 \pm 2u; x\right) \rightarrow 1$$

für  $x \rightarrow 0+$ , also

$$M_{p,\pm u}(x) \sim x^{\pm u + 1/2} \quad \text{für } x \rightarrow 0+. \quad (*)$$

(i) Aus (\*) folgt mit  $\operatorname{Re}(u) < 0$  und  $\operatorname{Im}(u) > 0$  sofort, dass die Funktion  $x \mapsto \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p + u)} M_{p,-u}(x)/x$  zu  $L^2(0, 1)$  gehört. Da  $\operatorname{Re}(-2u) > 0$  und  $\operatorname{Re}(-u - p + 1/2) > 0$ , folgt zudem, dass die Funktion  $x \mapsto \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)} M_{p,u}(x)/x$  nicht in  $L^2(0, 1)$  liegt. Die Funktion  $\alpha_p(\cdot, l)$  ist nach (3.9) für jedes  $x > 0$  eine Linearkombination

$$\alpha_p(x, l) = \frac{1}{x} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)} M_{p,u}(x) + \frac{1}{x} \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p + u)} M_{p,-u}(x)$$

der beiden eben untersuchten Funktionen

$$x \mapsto \frac{1}{x} \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)} M_{p,u}(x) \quad \text{und} \quad x \mapsto \frac{1}{x} \frac{\Gamma(2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p + u)} M_{p,-u}(x);$$

mithin gilt  $\alpha_p(\cdot, l) \notin L^2(0, 1)$ .

Andererseits gilt nach Satz 3.12 (ii), dass

$$|\alpha_p(x, l)|^2 = \frac{|W_{p,u}(x)|^2}{x^2} \sim e^{-x} x^{2p-2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

also ist  $\alpha_p(\cdot, l) \in L^2(1, \infty)$ .

- (ii) Aus (\*) folgt mit  $\operatorname{Re}(u) < 0$  und  $\operatorname{Im}(u) > 0$  sofort, dass die Funktion  $\beta_p(\cdot, l)$  zu  $L^2(0, 1)$  gehört.

Aus Satz 3.12 (i) ist bekannt, dass

$$\beta_p(x, l) \sim e^{x/2} x^{-p-1} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

und damit  $\beta_p(\cdot, l) \notin L^2(1, \infty)$ . □

**3.15 Lemma:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Es seien  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$  und  $u := i \cdot (l)^{1/2}$ . Dann gilt:*

- (i) Die Funktionen  $\alpha_p(\cdot, l)$  und  $\beta_p(\cdot, l)$  sind Lösungen von  $\tau_p[y] = ly$ .
- (ii)  $x^2 \cdot \mathscr{W} \{\alpha_p(x, l), \beta_p(x, l)\} = 1$  für alle  $x > 0$  und alle  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$ .
- (iii)  $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-p-i\sqrt{\lambda})}{\Gamma(1-2i\sqrt{\lambda})} \mathscr{W} \{W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x), M_{p,-i\sqrt{\lambda}}(x)\} = 1$  für alle  $x > 0$  und alle  $\lambda > 0$ .

**Beweis:**

- (i) Dies folgt unmittelbar aus den Bemerkungen zu (3.13).

- (ii) Es seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $b \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(a; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{x^n}{n!} = \frac{a}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; x)$$

für alle  $x > 0$ . Es seien  $\kappa \in \mathbb{C}$  und  $\mu \in \mathbb{C} \setminus X_W$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} M_{\kappa, \mu}(x) &= -\frac{1}{2} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu}{x} M_{\kappa, \mu}(x) + e^{-x/2} x^{\mu+1/2} \frac{d}{dx} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; x\right) \\ &= -\frac{1}{2} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu}{x} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu - \kappa}{1 + 2\mu} e^{-x/2} x^{\mu+1/2} \\ &\quad \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right); 1 + 2\left(\mu + \frac{1}{2}\right); x\right) \\ &= -\frac{1}{2} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu}{x} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\frac{1}{2} + \mu - \kappa}{1 + 2\mu} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{\kappa-1/2, \mu+1/2}(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jedes fest gewählte  $u \in \mathbb{H}_\ell \setminus X_W$ , dass

$$\frac{d}{dx} M_{p, \pm u}(x) = -\frac{1}{2} M_{p, \pm u}(x) + \frac{\frac{1}{2} \pm u}{x} M_{p, \pm u}(x) + \frac{\frac{1}{2} \pm u - p}{1 \pm 2u} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{p-1/2, \pm u+1/2}(x) \quad (+)$$

für alle  $x > 0$ . Nach Satz 3.10 (i) ist die Funktion  $x \mapsto x^2 \cdot \mathscr{W} \{\alpha_p(x, l), \beta_p(x, l)\}$  stetig differenzierbar auf  $(0, \infty)$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \mathscr{W} \{\alpha_p(x, l), \beta_p(x, l)\} &= x^2 \left\{ \alpha_p(x, l) \frac{d}{dx} \beta_p(x, l) - \beta_p(x, l) \frac{d}{dx} \alpha_p(x, l) \right\} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \cdot \mathscr{W} \{W_{p, u}(x), M_{p, -u}(x)\}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2 \cdot \mathscr{W} \{\alpha_p(x, l), \beta_p(x, l)\}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \frac{d}{dx} \mathscr{W} \{W_{p, u}(x), M_{p, -u}(x)\} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \{W_{p, u}(x) M''_{p, -u}(x) - M_{p, -u}(x) W''_{p, u}(x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle  $x > 0$ , wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass  $M_{p,-u}$  und  $W_{p,u}$  die Differentialgleichung (3.13) erfüllen. Die Funktion

$$x \mapsto x^2 \cdot \mathscr{W} \{ \alpha_p(x, l), \beta_p(x, l) \} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)}{\Gamma(1 - 2u)} \cdot \mathscr{W} \{ W_{p,u}(x), M_{p,-u}(x) \}$$

ist also konstant auf  $(0, \infty)$ . Mit (3.9), (+) und Satz 3.12 (i) folgt schließlich

$$\begin{aligned} & \mathscr{W} \{ W_{p,u}(x), M_{p,-u}(x) \} \\ &= \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)} M_{p,u}(x) \cdot M'_{p,-u}(x) - M_{p,-u}(x) \cdot \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)} M'_{p,u}(x) \\ &= \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)} \left( M_{p,u}(x) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u}{x} M_{p,-u}(x) + \frac{\frac{1}{2} - u - p}{1 - 2u} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{p-1/2, -u+1/2}(x) \right\} \right. \\ & \quad \left. - M_{p,-u}(x) \cdot \left\{ -\frac{1}{2} M_{p,u}(x) + \frac{\frac{1}{2} + u}{x} M_{p,u}(x) + \frac{\frac{1}{2} + u - p}{1 + 2u} \frac{1}{\sqrt{x}} M_{p-1/2, u+1/2}(x) \right\} \right) \\ & \rightarrow \frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)} \left\{ \left( \frac{1}{2} - u \right) - \left( \frac{1}{2} + u \right) \right\} \end{aligned}$$

für  $x \rightarrow 0+$ , und zusammen mit  $\frac{\Gamma(-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)}(-2u) = \frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(\frac{1}{2} - u - p)}$  folgt, dass

$$x^2 \cdot \mathscr{W} \{ \alpha_p(x, l), \beta_p(x, l) \} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)}{\Gamma(1 - 2u)} \cdot \mathscr{W} \{ W_{p,u}(x), M_{p,-u}(x) \} = 1$$

für alle  $x > 0$ . Nach Satz 3.13 (iv) können wir die Funktion

$$u \mapsto \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)}{\Gamma(1 - 2u)} \cdot \mathscr{W} \{ W_{p,u}(x), M_{p,-u}(x) \}$$

analytisch auf ganz  $\mathbb{H}_\ell$  fortsetzen; offensichtlich ist dies für die Funktion  $u \mapsto 1$  ebenfalls möglich, so dass die Gleichung

$$x^2 \cdot \mathscr{W} \{ \alpha_p(x, l), \beta_p(x, l) \} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p - u)}{\Gamma(1 - 2u)} \cdot \mathscr{W} \{ W_{p,u}(x), M_{p,-u}(x) \} = 1, \quad x > 0,$$

sogar für alle  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$  bzw. alle  $u \in \mathbb{H}_\ell$  gilt.

(iii) Dies folgt analog zu (ii). □

**3.16 Bemerkung:** Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes hängen die folgenden Funktionen bzw. der folgende Raum von  $p$  ab:

$$s_1 = s_1^{(p)}, \quad s_2 = s_2^{(p)}, \quad f_a = f_a^{(p)}, \quad f_b = f_b^{(p)}, \quad M_{jk} = M_{jk}^{(p)}, \quad \rho_{jk} = \rho_{jk}^{(p)}, \quad \mathscr{H} = \mathscr{H}_p.$$

Zur besseren Lesbarkeit wird dieser Zusatz meist weggelassen. In den konkreten Rechnungen ist stets zu sehen, dass die eben aufgezählten Funktionen bzw. der genannte Raum von  $p$  abhängen.

**3.17 Satz:** Es seien  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl und  $\tau_p$  wie in (3.12) definiert. Dann liegt bei  $a = 0$  und bei  $b = \infty$  jeweils der Grenzpunktfall vor. Das durch

$$s_1(1) = s_2'(1) = 0, \quad s_2(1) = s_1'(1) = 1,$$

eindeutig bestimmte System von Fundamentallösungen  $s_1(\cdot, l), s_2(\cdot, l)$  von  $\tau_p[y] = ly$  kann für  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$  und  $x > 0$  dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} s_1(x, l) &= \alpha_p(1, l) \beta_p(x, l) - \beta_p(1, l) \alpha_p(x, l), \\ s_2(x, l) &= \beta_p'(1, l) \alpha_p(x, l) - \alpha_p'(1, l) \beta_p(x, l). \end{aligned}$$

Dabei steht  $'$  für  $d/dx$ .

**Beweis:** Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt die Tatsache, dass bei  $a = 0$  und bei  $b = \infty$  jeweils der Grenzpunktfall vorliegt, aus Lemma 3.14 und der Weylschen Alternative.

Sei nun  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$  beliebig, aber fest gewählt. Dann sind die im Satz definierten Funktionen  $s_1(\cdot, l)$  und  $s_2(\cdot, l)$  nach Lemma 3.15 (i) jeweils Lösungen von  $\tau_p[y] = ly$ . Offensichtlich gilt

$$s_1(1, l) = s_2'(1, l) = 0$$

für alle  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$ , und mit Lemma 3.15 (ii) folgt, dass

$$s_2(1, l) = s_1'(1, l) = \alpha_p(1, l)\beta_p'(1, l) - \beta_p(1, l)\alpha_p'(1, l) = 1$$

für alle  $l \in \mathbb{C}^{(-)}$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Aus Satz 3.17 folgt zusammen mit Satz 3.4, dass der maximale von  $\tau_p$  erzeugte Operator  $T_p$  selbstadjungiert ist. Die charakteristischen Funktionen  $f_a, f_b$  von  $T_p$  können nach Satz 3.5 und Satz 3.17 für  $l \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  dargestellt werden durch

$$f_a(l) = \frac{\beta_p'(1, l)}{\beta_p(1, l)}, \quad f_b(l) = \frac{\alpha_p'(1, l)}{\alpha_p(1, l)}.$$

Mit Lemma 3.15 (ii) folgt, dass die Funktionen  $M_{jk}$  aus der charakteristischen Matrix von  $T_p$  für  $l \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  wie folgt dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} M_{11}(l) &= \frac{\alpha_p'(1, l)}{\alpha_p(1, l)} + \frac{\alpha_p'(1, l)^2}{\alpha_p(1, l)} \beta_p(1, l), \\ M_{12}(l) &= M_{21}(l) = \frac{1}{2} + \alpha_p'(1, l)\beta_p(1, l), \\ M_{22}(l) &= \alpha_p(1, l)\beta_p(1, l). \end{aligned}$$

**3.18 Lemma:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Dann gilt*

(i)  $\rho_{jk}(\lambda) = 0$  für jedes  $\lambda \leq 0$ ,  $j, k = 1, 2$ .

(ii) für jedes  $\lambda > 0$ , dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \rho_{11}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 \alpha_p'(1, \lambda)^2, \\ \frac{d}{d\lambda} \rho_{12}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \rho_{21}(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 \alpha_p(1, \lambda)\alpha_p'(1, \lambda), \\ \frac{d}{d\lambda} \rho_{22}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 \alpha_p(1, \lambda)^2. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha_p(1, \lambda) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha_p(1, \lambda + i\varepsilon) = W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\ \alpha_p'(1, \lambda) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha_p'(1, \lambda + i\varepsilon) = W'_{p, i\sqrt{\lambda}}(1) - W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \end{aligned}$$

für alle  $\lambda > 0$ .

**Beweis:** Wie wir aus Satz 3.10 und Satz 3.11 wissen, sind die Funktionen  $l \mapsto \alpha_p(1, l)$  und  $l \mapsto \beta_p(1, l)$  jeweils holomorph in  $\mathbb{C}^{(-)}$ .

(i) Aus Satz 3.13 (iii) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\alpha_p(x, \lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_p(x+h, \lambda) - \alpha_p(x, \lambda)}{h} \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dx}\beta_p(x, \lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta_p(x+h, \lambda) - \beta_p(x, \lambda)}{h} \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

für alle  $\lambda < 0$ ,  $x > 0$ . Zusammen mit der Bemerkung zu Beginn des Beweises und Satz 3.13 (iii) und (iv) folgt unmittelbar, dass  $\rho_{jk}(\lambda) = 0$  für alle  $\lambda < 0$ ,  $j, k = 1, 2$ . Offensichtlich gilt

$$\rho_{jk}(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\delta} \text{Im}\{M_{jk}(t + i\varepsilon)\} dt = 0, \quad j, k = 1, 2.$$

(ii) Nach Satz 3.13 (ii) gilt für jedes fest gewählte  $x > 0$ , dass  $\alpha_p(x, \lambda) \in \mathbb{R}$  für alle  $\lambda > 0$  und damit auch

$$\frac{d}{dx}\alpha_p(x, \lambda) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_p(x+h, \lambda) - \alpha_p(x, \lambda)}{h} \in \mathbb{R}$$

für alle  $\lambda > 0$ ,  $x > 0$ .

Es sei  $\lambda > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Dann gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i \cdot (\lambda + i\varepsilon)^{1/2} = i\sqrt{\lambda}$ . Nach der Bemerkung zu Beginn dieses Beweises und Satz 3.13 (iv) sind die Funktionen

$$\begin{aligned}u &\mapsto W_{p,u}(1), \\ u &\mapsto W'_{p,u}(1) - W_{p,u}(1), \\ u &\mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} M_{p,-u}(1), \\ u &\mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - u\right)}{\Gamma(1 - 2u)} \{M'_{p,-u}(1) - M_{p,-u}(1)\},\end{aligned}$$

jeweils holomorph in  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Daher gilt

$$\rho_{jk}(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\lambda+\delta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}\{M_{jk}(t + i\varepsilon)\} dt, \quad j, k = 1, 2.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\beta_p(1, \lambda) - \overline{\beta_p(1, \lambda)} = \frac{i}{\pi} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 \alpha_p(1, \lambda), \quad (3.14)$$

wobei wir vor dem Hintergrund der Konvergenz  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i(\lambda + i\varepsilon)^{1/2} = i\sqrt{\lambda}$  erhalten, dass

$$\begin{aligned}\alpha_p(1, \lambda) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha_p(1, \lambda + i\varepsilon) = W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\ \alpha'_p(1, \lambda) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha'_p(1, \lambda + i\varepsilon) = W'_{p, i\sqrt{\lambda}}(1) - W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\ \beta_p(1, \lambda) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \beta_p(1, \lambda + i\varepsilon) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right)}{\Gamma(1 - 2i\sqrt{\lambda})} M_{p, i\sqrt{\lambda}}(1).\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}\{M_{11}(t + i\varepsilon)\} &= \frac{1}{2\pi} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 \alpha'_p(1, t)^2, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}\{M_{12}(t + i\varepsilon)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}\{M_{21}(t + i\varepsilon)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 \alpha_p(1, t) \alpha'_p(1, t),\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}\{M_{11}(t + i\varepsilon)\} = \frac{1}{2\pi} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 \alpha_p(1, t)^2,$$

für alle  $t \in (\delta, \lambda + \delta)$ . Da wir den Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0^+$  in der Darstellung der Funktionen  $\rho_{jk}$  berechnen möchten, bemerken wir, dass nach Satz 3.11 und Satz 3.13 (iv) die Funktionen

$$u \mapsto W_{p,u}(1) \quad \text{und} \quad u \mapsto W'_{p,u}(1) - W_{p,u}(1)$$

holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  sind; zudem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 &= 0, \quad \text{falls } p < 1/2, \\ \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t})|^2 &\sim \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \quad \text{für } t \rightarrow 0^+, \quad \text{falls } p = 1/2. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \rho_{11}(\lambda) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{\lambda+\delta} \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 \alpha'_p(1, t)^2 dt \\ &= \int_0^{\lambda} \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{t}) |\Gamma(-i\sqrt{t} - p + 1/2)|^2 \alpha'_p(1, t)^2 dt, \end{aligned}$$

und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass

$$\frac{d}{d\lambda} \rho_{11}(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 \alpha'_p(1, \lambda)^2.$$

Völlig analog erhalten wir die behaupteten Formeln für die Funktionen  $\rho_{12}(\lambda) = \rho_{21}(\lambda)$  und  $\rho_{22}(\lambda)$ .  $\square$

Wir betrachten nun  $\lambda$ -messbare vektorwertige Funktionen  $\phi(\cdot) = (\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  und setzen

$$\|\phi\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^2 \phi_j(\lambda) \overline{\phi_k(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda),$$

wobei es sich bei den Integralen bzgl.  $d\rho_{jk}(\lambda)$  um Stieltjessche Integrale handelt. Wie im Absatz nach Lemma 3.7 beschrieben bilden wir den Hilbertraum  $\mathcal{H} := \{\phi : \|\phi\| < \infty\}$  mit Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} := \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^2 \phi_j(\lambda) \overline{\psi_k(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda)$$

und Norm  $\|\phi\|_{\mathcal{H}} := \|\phi\|$ . Der Hilbertraum  $\mathcal{H}$  hängt von  $p$  ab,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p$ .

Für den Rest dieses Abschnittes bezeichne  $\rho_p$  die auf  $(0, \infty)$  definierte Funktion

$$\rho_p(\lambda) := \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right) \right|^2. \quad (3.15)$$

**3.19 Lemma:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Es seien  $\tau_p$  wie in (3.12) definiert und  $T_p$  der maximale von  $\tau_p$  erzeugte Operator. Die Funktionen  $s_1 = s_1^{(p)}$  und  $s_2 = s_2^{(p)}$  bilden das in Satz 3.17 beschriebene System von Fundamentallösungen der Differentialgleichung  $\tau_p[y] = ly$ . Für jedes  $\lambda > 0$  gilt*

$$s_j(x, \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} s_j(x, \lambda + i\varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad (3.16)$$

bzgl. der expliziten Darstellung aus Satz 3.17.

Des Weiteren sei  $\rho_p$  die in (3.15) definierte Funktion. Dann gilt:

(i) Der Operator  $\mathcal{U}'_p : L^2(0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}_p$ ,

$$(\mathcal{U}'_p f)(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)) = \lim_{A \rightarrow 0+, B \rightarrow \infty} \left( \int_A^B s_1(x, \lambda) f(x) dx, \int_A^B s_2(x, \lambda) f(x) dx \right), \quad \lambda > 0,$$

ist unitär, und der inverse Operator  $(\mathcal{U}'_p)^{-1} : \mathcal{H}_p \rightarrow L^2(a, b)$  ist gegeben durch

$$(\mathcal{U}'_p)^{-1}(\phi_1, \phi_2)(x) = f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) \cdot \{\phi_1(\lambda) \alpha'_p(1, \lambda) + \phi_2(\lambda) \alpha_p(1, \lambda)\} \rho_p(\lambda) d\lambda, \quad x > 0.$$

(ii) Für jedes  $f \in D(T_p)$  gilt

$$(T_p[f])(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) \cdot \{\phi_1(\lambda) \alpha'_p(1, \lambda) + \phi_2(\lambda) \alpha_p(1, \lambda)\} \cdot \lambda \rho_p(\lambda) d\lambda, \quad x > 0;$$

insbesondere ist der Operator  $\mathcal{U}'_p \circ T_p \circ (\mathcal{U}'_p)^{-1} : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$  in „Diagonalform“, d. h.

$$(\mathcal{U}'_p \circ T_p \circ (\mathcal{U}'_p)^{-1})(\phi_1, \phi_2)(\lambda) = (\lambda \cdot \phi_1(\lambda), \lambda \cdot \phi_2(\lambda)), \quad \lambda > 0.$$

Dabei steht l.i.m. für „Limit in mean“, d. h. den Limes bzgl.  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p}$  bzw. den Limes bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2(0, \infty)}$ .

**Beweis:** Dass (3.16) gilt, ist leicht zu sehen.

Unter den Voraussetzungen des Lemmas folgt mit Lemma 3.18 für jedes  $\phi \in \mathcal{H}_p$ , dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \sum_{j,k=1}^2 s_j(x, \lambda) \phi_k(\lambda) d\rho_{jk}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) \cdot \{\phi_1(\lambda) \alpha'_p(1, \lambda) + \phi_2(\lambda) \alpha_p(1, \lambda)\} \rho_p(\lambda) d\lambda$$

für jedes  $x > 0$ , und durch Anwenden des Satzes 3.8 folgt die Behauptung.  $\square$

Wir definieren den Operator  $\mathcal{U}''_p : \mathcal{H}_p \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$  durch

$$\mathcal{U}''_p(\phi_1, \phi_2)(\lambda) := \alpha'_p(1, \lambda) \phi_1(\lambda) + \alpha_p(1, \lambda) \phi_2(\lambda).$$

Dann gilt das folgende

**3.20 Lemma:** Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Dann ist der eben definierte Operator  $\mathcal{U}''_p : \mathcal{H}_p \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$  unitär, und der inverse Operator  $(\mathcal{U}''_p)^{-1} : L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda) \rightarrow \mathcal{H}_p$  ist gegeben durch

$$((\mathcal{U}''_p)^{-1}g)(\lambda) = (-\beta_p(1, \lambda)g(\lambda), \beta'_p(1, \lambda)g(\lambda)).$$

**Beweis:** Offensichtlich ist  $\mathcal{U}''_p$  linear. Es sei  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}_p$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(\phi_1, \phi_2)\|_{\mathcal{H}_p}^2 &= \int_0^\infty \sum_{j,k=1}^2 \phi_j(\lambda) \overline{\phi_k(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda) \\ &= \int_0^\infty |\phi_1(\lambda)|^2 d\rho_{11}(\lambda) + \int_0^\infty |\phi_2(\lambda)|^2 d\rho_{22}(\lambda) + \int_0^\infty \left( \phi_1(\lambda) \overline{\phi_2(\lambda)} + \overline{\phi_1(\lambda)} \phi_2(\lambda) \right) d\rho_{12}(\lambda) \\ &= \int_0^\infty |\phi_1(\lambda)|^2 \alpha'_p(1, \lambda)^2 \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty |\phi_2(\lambda)|^2 \alpha_p(1, \lambda)^2 \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \int_0^\infty \operatorname{Re}\{[\phi_1(\lambda)\alpha'_p(1, \lambda)] \overline{\phi_2(\lambda)\alpha_p(1, \lambda)}\} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 & = \|\phi_1(\cdot)\alpha'_p(1, \cdot)\|_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)}^2 + \|\phi_2(\cdot)\alpha_p(1, \cdot)\|_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)}^2 \\
 & \quad + \langle \phi_1(\cdot)\alpha'_p(1, \cdot), \phi_2(\cdot)\alpha_p(1, \cdot) \rangle_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)} \\
 & \quad + \langle \phi_2(\cdot)\alpha_p(1, \cdot), \phi_1(\cdot)\alpha'_p(1, \cdot) \rangle_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)} \\
 & = \langle \phi_1(\cdot)\alpha'_p(1, \cdot) + \phi_2(\cdot)\alpha_p(1, \cdot), \phi_1(\cdot)\alpha'_p(1, \cdot) + \phi_2(\cdot)\alpha_p(1, \cdot) \rangle_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)} \\
 & = \|\mathcal{U}_p''(\phi_1, \phi_2)\|_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)}^2,
 \end{aligned}$$

also ist  $\mathcal{U}_p''$  isometrisch. Zudem gilt für den durch

$$(\mathcal{S}_p g)(\lambda) = (-\beta_p(1, \lambda)g(\lambda), \beta'_p(1, \lambda)g(\lambda))$$

definierten Operator  $\mathcal{S}_p : L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda) \rightarrow \mathcal{H}_p$ , dass

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}_p g\|_{\mathcal{H}_p}^2 & = \|(-\beta_p(1, \cdot)g(\cdot), \beta'_p(1, \cdot)g(\cdot))\|_{\mathcal{H}_p}^2 \\
 & = \int_0^\infty |g(\lambda)|^2 \left\{ \beta_p(1, \lambda)\overline{\beta_p(1, \lambda)}\alpha'_p(1, \lambda)^2 + \beta'_p(1, \lambda)\overline{\beta'_p(1, \lambda)}\alpha_p(1, \lambda)^2 \right. \\
 & \quad \left. - \left( \beta_p(1, \lambda)\overline{\beta'_p(1, \lambda)} + \overline{\beta_p(1, \lambda)}\beta'_p(1, \lambda) \right) \alpha_p(1, \lambda)\alpha'_p(1, \lambda) \right\} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 & = \int_0^\infty |g(\lambda)|^2 \left\{ \alpha'_p(1, \lambda)\overline{\beta_p(1, \lambda)} [\alpha'_p(1, \lambda)\beta_p(1, \lambda) - \alpha_p(1, \lambda)\beta'_p(1, \lambda)] \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_p(1, \lambda)\overline{\beta'_p(1, \lambda)} [\alpha_p(1, \lambda)\beta'_p(1, \lambda) - \alpha'_p(1, \lambda)\beta_p(1, \lambda)] \right\} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 & = \int_0^\infty |g(\lambda)|^2 \left\{ \overline{\alpha_p(1, \lambda)\beta'_p(1, \lambda) - \alpha'_p(1, \lambda)\beta_p(1, \lambda)} \right\} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 & = \|g\|_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)}^2
 \end{aligned}$$

für jedes  $g \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$ , wobei wir mehrfach Lemma 3.15 (iii) verwendet haben. Es sei nochmals erwähnt, dass  $\alpha_p(1, \lambda), \alpha'_p(1, \lambda), \beta_p(1, \lambda), \beta'_p(1, \lambda)$  für  $\lambda > 0$  erklärt sind durch

$$\begin{aligned}
 \alpha_p(1, \lambda) & := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha_p(1, \lambda + i\varepsilon) = W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\
 \alpha'_p(1, \lambda) & := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \alpha'_p(1, \lambda + i\varepsilon) = W'_{p, i\sqrt{\lambda}}(1) - W_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\
 \beta_p(1, \lambda) & := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \beta_p(1, \lambda + i\varepsilon) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right)}{\Gamma(1 - 2i\sqrt{\lambda})} M_{p, i\sqrt{\lambda}}(1), \\
 \beta'_p(1, \lambda) & := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \beta'_p(1, \lambda + i\varepsilon) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right)}{\Gamma(1 - 2i\sqrt{\lambda})} \{M'_{p, i\sqrt{\lambda}}(1) - M_{p, i\sqrt{\lambda}}(1)\}.
 \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{U}_p''(\mathcal{S}_p g))(\lambda) & = \mathcal{U}_p''(-\beta_p(1, \cdot)g(\cdot), \beta'_p(1, \cdot)g(\cdot))(\lambda) \\
 & = g(\lambda)\{\alpha_p(1, \lambda)\beta'_p(1, \lambda) - \alpha'_p(1, \lambda)\beta_p(1, \lambda)\} \\
 & = g(\lambda)
 \end{aligned}$$

für alle  $g \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$ . Folglich ist  $\mathcal{U}_p''$  auch surjektiv, also eine surjektive Isometrie und damit unitär. Insbesondere gilt  $(\mathcal{U}_p'')^{-1} = \mathcal{S}_p$ , und das Lemma ist vollständig bewiesen.  $\square$

Setze  $\mathcal{U}_p := \mathcal{U}_p'' \circ \mathcal{U}'_p$ , wobei  $\mathcal{U}'_p$  den unitären Operator aus Lemma 3.19 und  $\mathcal{U}_p''$  den unitären Operator aus Lemma 3.20 bezeichne. Für jedes  $f \in L^2(0, \infty)$  gilt, dass

$$(\mathcal{U}_p f)(\lambda) = (\mathcal{U}_p'' \mathcal{U}'_p f)(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{l.i.m.}_{A \rightarrow 0+, B \rightarrow \infty} \int_A^B f(x) \{ \alpha'_p(1, \lambda) s_1(x, \lambda) + \alpha_p(1, \lambda) s_2(1, \lambda) \} dx \\
 &= \text{l.i.m.}_{A \rightarrow 0+, B \rightarrow \infty} \int_A^B f(x) \alpha_p(x, \lambda) \{ \alpha_p(1, \lambda) \beta'_p(1, \lambda) - \alpha'_p(1, \lambda) \beta_p(1, \lambda) \} dx \\
 &= \text{l.i.m.}_{A \rightarrow 0+, B \rightarrow \infty} \int_A^B f(x) \alpha_p(x, \lambda) dx \\
 &= \text{l.i.m.}_{A \rightarrow 0+} \int_A^\infty f(x) \alpha_p(x, \lambda) dx,
 \end{aligned}$$

denn  $\alpha_p(x, \lambda) = \frac{W_{p, i\sqrt{\lambda}}(x)}{x} \sim e^{-x/2} x^{p-1}$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dabei bezeichne  $s_1 = s_1^{(p)}$ ,  $s_2 = s_2^{(p)}$  wie üblich das System von Fundamentallösungen aus Satz 3.17 für  $\tau_p[y] = ly$ ; man beachte noch (3.16).

Andererseits gilt mit  $\phi_1(\cdot) = -\beta_p(1, \cdot)g(\cdot)$  und  $\phi_2(\cdot) = \beta'_p(1, \cdot)g(\cdot)$ , dass

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{U}_p^{-1}g)(x) &= (\mathcal{U}'_p)^{-1}(\mathcal{U}''_p)^{-1}g(x) \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) \{ \phi_1(\lambda) \alpha'_p(1, \lambda) + \phi_2(\lambda) \alpha_p(1, \lambda) \} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) g(\lambda) \{ -\beta_p(1, \lambda) \alpha'_p(1, \lambda) + \beta'_p(1, \lambda) \alpha_p(1, \lambda) \} \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) g(\lambda) \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

für jedes  $g \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$ . Insgesamt haben wir gezeigt:

**3.21 Satz:** Es seien  $p \leq \frac{1}{2}$  eine reelle Zahl,  $\tau_p$  wie in (3.12) definiert und  $T_p$  der maximale von  $\tau_p$  erzeugte Operator. Die Funktion  $\rho_p : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma(1/2 - p - i\sqrt{\lambda}) \right|^2,$$

ist stetig und nullstellenfrei<sup>6</sup>.

Betrachte den Operator  $\mathcal{U}_p : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$  mit

$$(\mathcal{U}_p f)(\lambda) = \text{l.i.m.}_{A \rightarrow 0+} \int_A^\infty \alpha_p(x, \lambda) f(x) dx,$$

wobei l.i.m. hier den Limes bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)}$  und in (ii) bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2(0, \infty)}$  bezeichne. Dann gilt:

(i) Der Operator  $\mathcal{U}_p : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$  ist unitär.

(ii) Für jedes  $g$  in  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$  ist  $(\mathcal{U}_p^{-1}g)(x) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha_p(x, \lambda) g(\lambda) \cdot \rho_p(\lambda) d\lambda$ .

(iii) Falls  $\lambda g(\lambda) \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda) d\lambda)$ , so gilt

$$(\mathcal{U}_p T_p \mathcal{U}_p^{-1}g)(\lambda) = \lambda g(\lambda)$$

fast überall bzgl.  $\rho_p(\lambda) d\lambda$ .

<sup>6</sup>Es sei daran erinnert, dass die Funktion  $1/\Gamma$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist.

Dies ist ein Spezialfall von Theorem 1 bei Rosenblum [20], S. 582-583. Der dortige Beweis wird auf den Seiten 581 und 582 geführt und diente als Rahmen für die Herleitung von Satz 3.21 in diesem Abschnitt.

### 3.4 Über die Hilbertsche Matrix

Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Wir betrachten die verallgemeinerte Hilbertsche Matrix  $H_p = \left( \frac{1}{n+m+1-p} \right)_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ .

**3.22 Satz:** Für die Whittaker-Funktion  $W_{p,u}$  gilt die Integraldarstellung

$$\Gamma\left(u - p + \frac{1}{2}\right) W_{p,u}(x) x^{-u-1/2} = \int_{1/2}^{\infty} e^{-x\tau} \left(\tau + \frac{1}{2}\right)^{p+u-1/2} \left(\tau - \frac{1}{2}\right)^{u-p-1/2} d\tau \quad (3.17)$$

für alle  $x > 0$ , wobei  $p < \frac{1}{2} + \operatorname{Re}(u)$ .  $\Gamma$  bezeichne die Gammafunktion.

**Beweis:** Diese und einige weitere Integraldarstellungen für die Whittaker-Funktionen finden sich bei Buchholz [1]; die vorliegende Integraldarstellung wird auf den Seiten 59 bis 62 hergeleitet. In Formel (3) auf Seite 62 setze man  $\varphi = 0 = \zeta$  und substituiere  $t := u - 1/2$ .  $\square$

Setze  $\phi_n(x) := e^{-x/2} \mathfrak{L}_n(x)$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wie wir aus Abschnitt A.1 wissen, bilden  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(0, \infty)$ .

**3.23 Lemma:** Für jedes  $x > 0$  und jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} \phi_n(t) dt = \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \left(x + \frac{1}{2}\right)^{-n-1} \quad \text{und} \quad |\phi_n(x)| \leq 1. \quad (3.18)$$

**Beweis:** Es sei  $x > 0$ . Falls  $n = 0$  ist, so gilt wie behauptet  $\int_0^{\infty} e^{-tx} \phi_0(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t(x+1/2)} dt = (x + \frac{1}{2})^{-1}$ . Sei nun  $n \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  folgt mit der Leibniz-Formel, dass

$$e^{-t(x-1/2)} \cdot \frac{d^j}{dt^j} (t^n e^{-t}) = e^{-t(x-1/2)} \cdot \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^\alpha e^{-t} \frac{n!}{(n-j+\alpha)!} t^{n-j+\alpha},$$

und dieser Ausdruck strebt gegen Null, falls  $t \rightarrow 0$  oder  $t \rightarrow \infty$ . Daher verschwinden in der folgenden  $n$ -fachen partiellen Integration sämtliche Randterme; zusammen mit der Transformation  $\tau := t(x + 1/2)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-tx} \phi_n(t) dt &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t(x-1/2)} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-t(x+1/2)} t^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \left(x + \frac{1}{2}\right)^{-n-1} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \left(x + \frac{1}{2}\right)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Für den Beweis der Ungleichung  $|\phi_n(x)| \leq 1$  für alle  $x > 0$  und jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei auf Szegö [23], S. 164, verwiesen.  $\square$

**3.24 Lemma:** Es seien  $p \leq 1/2$  und  $\lambda > 0$ . Dann existiert eine Konstante  $C_p > 0$ , so dass

$$|W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x)| \leq C_p \cdot W_{p,0}(x) \quad \text{für alle } x > 0.$$

**Beweis:** Es sei  $\lambda > 0$ . Betrachte zuerst den Fall  $p < 1/2$ . Aus (3.17) folgt, dass

$$\begin{aligned} |W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x)| &\leq \frac{1}{|\Gamma(i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|} \sqrt{x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p)}{\Gamma(\frac{1}{2} - p)} \int_{1/2}^{\infty} e^{-tx} \left(t + \frac{1}{2}\right)^{p-1/2} \left(t - \frac{1}{2}\right)^{-p-1/2} dt \\ &= \frac{1}{|\Gamma(i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|} \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) W_{p,0}(x) \\ &= C_p \cdot W_{p,0}(x) \quad \text{für alle } x > 0. \end{aligned}$$

Sei nun  $p = 1/2$ . Zunächst bemerken wir, dass  $|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}, W_{\frac{1}{2},0} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  stetige Funktionen sind und  $W_{\frac{1}{2},0}(x) = \sqrt{x}e^{-x/2} \neq 0$  für alle  $x > 0$ . Aus Satz 3.12 (ii) folgt für  $u = i\sqrt{\lambda}$  unmittelbar, dass  $W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x})$  für  $x \rightarrow 0+$ . Daher existieren eine Konstante  $\tilde{C} > 0$  und eine Zahl  $\delta > 0$  derart, dass

$$\frac{|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x)|}{W_{\frac{1}{2},0}(x)} = e^{x/2} \frac{|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x)|}{\sqrt{x}} \leq \tilde{C} \quad \text{für alle } x \in (0, \delta).$$

Des Weiteren sind  $|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x)|$  und  $W_{\frac{1}{2},0}(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $\sqrt{x}e^{-x/2}$ , also gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\frac{|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x)|}{W_{\frac{1}{2},0}(x)} = \frac{|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}(x)|}{\sqrt{x}e^{-x/2}} \leq 3/2 \quad \text{für alle } x \in (N, \infty).$$

Auf dem kompakten Intervall  $[\delta, N]$  nimmt die stetige Funktion  $|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}|$  ihr Maximum und  $W_{\frac{1}{2},0}$  ihr Minimum an; offensichtlich ist  $\min_{x \in [\delta, N]} W_{\frac{1}{2},0}(x) = \min_{x \in [\delta, N]} \{\sqrt{x}e^{-x/2}\} > 0$ . Somit gilt

$$|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{\max_{x \in [\delta, N]} |W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}|}{\min_{x \in [\delta, N]} W_{\frac{1}{2},0}(x)} \cdot W_{\frac{1}{2},0}(x) \quad \text{für alle } x \in [\delta, N].$$

Insgesamt erhalten wir mit  $C_{\frac{1}{2}} := \max \left\{ \tilde{C}, 3/2, \frac{\max_{x \in [\delta, N]} |W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}|}{\min_{x \in [\delta, N]} W_{\frac{1}{2},0}(x)} \right\} > 0$ , dass

$$|W_{\frac{1}{2},i\sqrt{\lambda}}| \leq C_{\frac{1}{2}} \cdot W_{\frac{1}{2},0}(x) \quad \text{für alle } x > 0,$$

und das Lemma ist vollständig bewiesen.  $\square$

**3.25 Satz:** Es seien  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl und  $\mathcal{U}_p$  der unitäre Operator aus Satz 3.21. Der Operator  $\mathcal{K}_p$  sei für  $f \in L^2(0, \infty)$  definiert durch

$$(\mathcal{K}_p f)(x) = \Gamma(1-p) \int_0^{\infty} \frac{W_{p,1/2}(x+t)}{x+t} f(t) dt, \quad x > 0. \quad (3.19)$$

Dann gilt:  $\mathcal{K}_p : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  ist ein beschränkter selbstadjungierter Integraloperator, und

$$(\mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} g)(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} g(\lambda)$$

fast überall bzgl.  $\rho_p(\lambda)d\lambda$ .

**Beweis:** Wir folgen dem Beweis von Rosenblum [20], Theorem 2, S. 583.

Nach Shanker [21] gilt für  $\operatorname{Re}(r \pm u) > 0$ ,  $\frac{1}{2} - p + r \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ , dass

$$\Gamma(r+u)\Gamma(r-u)\frac{W_{p,u}(x)}{x} = \Gamma\left(\frac{1}{2} + r - p\right) \int_0^\infty (xt)^{r-1/2}(x+t)^{-r-1/2}W_{p,r}(x+t)\frac{W_{p,u}(t)}{t}dt, \quad x > 0.$$

Im Fall  $r = 1/2$  und  $u = i\sqrt{\lambda}$  für  $\lambda > 0$  ergibt sich, dass

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda}\right)\frac{W_{p,i\sqrt{\lambda}}(x)}{x} = \Gamma(1-p) \int_0^\infty \frac{W_{p,1/2}(x+t)}{x+t} \frac{W_{p,i\sqrt{\lambda}}(t)}{t}dt, \quad x > 0. \quad (3.20)$$

Im Fall  $r = 1/2$ ,  $u = 0$ , ergibt sich, dass

$$\Gamma(1/2)^2 \frac{W_{p,0}(x)}{x} = \Gamma(1-p) \int_0^\infty \frac{W_{p,1/2}(x+t)}{x+t} \frac{W_{p,0}(t)}{t}dt, \quad x > 0. \quad (3.21)$$

Es sei  $\mathcal{C}_c(0, \infty)$  die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $(0, \infty)$ . Sei  $g \in \mathcal{C}_c(0, \infty)$ . Nach Lemma 3.24 existiert eine Konstante  $C_p > 0$  derart, dass  $|W_{p,i\sqrt{\lambda}}| \leq C_p \cdot W_{p,0}(x)$  für alle  $x > 0$ . Damit und aus (3.21) folgt für jedes beliebige, feste  $x > 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \Gamma(1-p) \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{W_{p,1/2}(x+t)}{x+t} \alpha_p(t, \lambda) \rho_p(\lambda) g(\lambda) \right| dt d\lambda \\ & \leq C_p \Gamma(1-p) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W_{p,1/2}(x+t)}{x+t} \frac{W_{p,0}(t)}{t} \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 |g(\lambda)| dt d\lambda \\ & = \Gamma(1/2)^2 \frac{W_{p,0}(x)}{x} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) |\Gamma(-i\sqrt{\lambda} - p + 1/2)|^2 |g(\lambda)| d\lambda \\ & < \infty, \end{aligned}$$

denn der Integrand ist stetig in  $\lambda$  und  $g$  hat kompakten Träger. Wir dürfen nun den Satz von Fubini anwenden und erhalten für  $x > 0$  und  $\lambda > 0$  mit (3.20) und

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\sqrt{\lambda}\right)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} \quad \text{für } z := \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

dass

$$(\mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} g)(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda}\right) (\mathcal{U}_p^{-1} g)(x) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} (\mathcal{U}_p^{-1} g)(x)$$

und damit

$$(\mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} g)(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} g(\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (*)$$

Wegen  $\sup_{\lambda > 0} \left| \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} \right| = \pi$  ist der Multiplikationsoperator

$$M_h : L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda) \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$$

mit

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right) \right|^2, \quad \lambda > 0,$$

und

$$h(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})}, \quad \lambda > 0,$$

offensichtlich beschränkt, also ist  $\mathcal{K}_p$  beschränkt auf  $\mathcal{C}_c(0, \infty) \subset L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ . Da (\*) für alle  $g$  aus dem dichten Teilraum  $\mathcal{C}_c(0, \infty)$  von  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$  erfüllt ist, gilt (\*) schließlich für alle  $g$  in  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ . Der Integraloperator  $\mathcal{K}_p : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  ist also beschränkt mit Kern  $(x, y) \mapsto W_{p,1/2}(x+y)/(x+y) = \overline{W_{p,1/2}(y+x)/(y+x)}$ ; aus der letzten Gleichung folgt die Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{K}_p$ .  $\square$

**3.26 Lemma:** *Es sei  $p \leq 1/2$ . Dann gilt*

$$\langle \mathcal{K}_p \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2(0, \infty)} = \int_0^\infty (\mathcal{K}_p \phi_n)(x) \phi_m(x) dx = \frac{1}{n+m+1-p}$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:** Wir folgen dem Beweis von Rosenblum [19], S. 137-138.

Es seien  $p \leq 1/2$  und  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Da  $|\phi_n|$  nach oben durch Eins beschränkt ist, gilt mit der Transformation  $\tau := s - 1/2$  für jedes fest gewählte  $x > 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^\infty \int_0^\infty \left| \left(s + \frac{1}{2}\right)^p \left(s - \frac{1}{2}\right)^{-p} e^{-s(x+t)} \phi_n(t) \right| dt ds \\ & \leq \int_{1/2}^\infty \frac{1}{s} \left(s + \frac{1}{2}\right)^p \left(s - \frac{1}{2}\right)^{-p} e^{-sx} ds \\ & = e^{-x/2} \int_0^\infty F(\tau) d\tau \\ & < \infty, \end{aligned}$$

denn die durch  $F(\tau) := (\tau + 1/2)^{-1}(\tau + 1)^p \tau^{-p} e^{-\tau x}$  definierte Funktion  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und für  $\tau \rightarrow 0+$  asymptotisch gleich  $2\tau^{-p}$  sowie für  $\tau \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $\tau^{-1}e^{-\tau x}$ . Wir dürfen also den Satz von Fubini anwenden, und zusammen mit (3.17) und (3.18) folgt, dass

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_p \phi_n)(x) &= \int_0^\infty \int_{1/2}^\infty \left(s + \frac{1}{2}\right)^p \left(s - \frac{1}{2}\right)^{-p} e^{-s(x+t)} ds \phi_n(t) dt \\ &= \int_{1/2}^\infty e^{-xs} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{n-p} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{p-n-1} ds \\ &= \Gamma(1-p+n) \frac{W_{p-n-1/2,0}(x)}{\sqrt{x}}, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Schließlich ergibt sich mit (3.22), dem Satz von Fubini und (3.18), dass

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_p \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2(0, \infty)} &= \int_0^\infty (\mathcal{K}_p \phi_n)(x) \phi_m(x) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{1/2}^\infty e^{-sx} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{n-p} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{p-n-1} ds \phi_m(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{1/2}^{\infty} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{n+m-p} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{p-n-m-2} ds \\
 &= \int_0^1 t^{n+m-p} dt \\
 &= \frac{1}{n+m+1-p},
 \end{aligned}$$

wobei wir  $t := 1 - \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$  substituiert haben. Die Anwendbarkeit des Satzes von Fubini folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \int_{1/2}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| e^{-sx} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{n-p} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{p-n-1} \phi_m(x) \right| dx ds &\leq \int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{s} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{n-p} \left(s + \frac{1}{2}\right)^{p-n-1} ds \\
 &= \int_0^{\infty} G(\tau) d\tau \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

wobei wir  $\tau := s - 1/2$  substituiert haben, denn die durch  $G(\tau) := (\tau + 1/2)^{-1} \tau^{n-p} (\tau + 1)^{p-n-1}$  definierte Funktion  $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und für  $\tau \rightarrow 0+$  asymptotisch gleich  $2\tau^{n-p}$  sowie für  $\tau \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $\tau^{-2}$ .  $\square$

**3.27 Satz:** Es seien  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl und  $\mathcal{U}_p$  der unitäre Operator aus Satz 3.21. Betrachte die Orthonormalbasis  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$  von  $L^2(0, \infty)$  aus A.1. Definiere den Operator  $\mathcal{V}_p$  auf  $\ell_+^2$  durch  $\mathcal{V}_p(a) = \mathcal{U}_p \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n \right)$ . Dann gilt:

(i) Der Operator  $\mathcal{V}_p : \ell_+^2 \rightarrow L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$  ist unitär, und es gilt

$$\mathcal{V}_p^{-1} : L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda) \rightarrow \ell_+^2, \quad g \mapsto \mathcal{V}_p^{-1}(g) = \left( \int_0^{\infty} (\mathcal{U}_p^{-1}g)(x) \phi_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

(ii) Der Operator  $H_p : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  ist beschränkt und selbstadjungiert. Für jedes  $g \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$  gilt

$$(\mathcal{V}_p H_p \mathcal{V}_p^{-1}g)(\lambda) = (\mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1}g)(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} g(\lambda)$$

fast überall bzgl.  $\rho_p(\lambda)d\lambda$ .

**Beweis:** Wir folgen dem Beweis von Rosenblum [20], Theorem 4, S. 584.

- (i)  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$  bilden eine Orthonormalbasis von  $L^2(0, \infty)$ , und nach Satz 3.21 ist  $\mathcal{U}_p$  unitär, also bilden  $\mathcal{U}_p \phi_0, \mathcal{U}_p \phi_1, \mathcal{U}_p \phi_2, \dots$  eine Orthonormalbasis von  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ . Daraus folgt (i).
- (ii) Die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen der Orthonormalbasis  $e_0, e_1, e_2, \dots$  von  $\ell_+^2$  ist bekanntlich ein dichter Teilraum von  $\ell_+^2$ , auf dem  $H_p$  nach Lemma 3.26 unitär äquivalent zum Integraloperator  $\mathcal{K}_p$  ist; letzterer ist nach Satz 3.25 beschränkt und selbstadjungiert auf ganz  $L^2(0, \infty)$ . Daher können wir  $H_p$  eindeutig zu einem beschränkten selbstadjungierten Operator auf ganz  $\ell_+^2$  fortsetzen.

Es sei  $g \in L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ . Nach Satz 3.25 gilt

$$(\mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} g)(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} g(\lambda)$$

fast überall bzgl.  $\rho_p(\lambda)d\lambda$ . Aus (i) und Lemma 3.26 folgt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} \tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_m \rangle_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)} &= \langle \mathcal{K}_p \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2(0, \infty)} \\ &= \langle H_p e_n, e_m \rangle_{\ell_+^2} \\ &= \langle \mathcal{V}_p H_p \mathcal{V}_p^{-1} \tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_m \rangle_{L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)} \end{aligned}$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $\tilde{\phi}_j := \mathcal{U}_p \phi_j$  für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$ . Daraus folgt  $\mathcal{V}_p H_p \mathcal{V}_p^{-1} g = \mathcal{U}_p \mathcal{K}_p \mathcal{U}_p^{-1} g$ , wie behauptet.  $\square$

**3.28 Satz:** *Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Dann ist das Spektrum  $\sigma(H_p) = [0, \pi]$  von  $H_p$  rein kontinuierlich, und jeder Punkt in  $[0, \pi]$  besitzt die Multiplizität eins.*

**Beweis:** Dies sind (i) und (ii) von Theorem 5 bei Rosenblum [20], S. 584.

Nach Satz 3.27 ist der beschränkte selbstadjungierte Operator  $H_p$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $M_{\pi/\cosh(\pi\sqrt{\lambda})}$  auf  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ . Wir sind damit offensichtlich in der Situation des Satzes A.18, und wegen

$$\overline{\left\{ \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})} : \lambda > 0 \right\}} = [0, \pi]$$

folgt die Behauptung.  $\square$



# 4 Über eine diskrete Familie von Integraloperatoren

Auf den nächsten Seiten bis zum Beginn des Abschnittes 4.1 möchte ich die folgenden Eigenleistungen herausstellen: Lemma 4.1, Lemma 4.2, Satz 4.3, Lemma 4.5, Folgerung 4.6, Satz 4.7 und Bemerkung 4.13, alle samt Beweis. Zudem habe ich den Beweis des Theorems 1 bei Kostykin und Makarov [11] zum Beweis des Satzes 4.8 ausgebaut. Satz 4.8 selbst ist neu und ebenfalls eine Eigenleistung.

Wir definieren

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = 2 \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(t),$$

und  $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\phi(z) = 2 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{H}_r \cap \mathbb{S}^1}(z) = \begin{cases} \psi\left(i \frac{1-z}{1+z}\right), & \text{wenn } z \neq -1 \\ 0, & \text{wenn } z = -1 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Nach Satz 2.6 gilt:

$$G^* S_\psi G \text{ ist der Hankel-Operator } S_{z\phi} \text{ auf } H^2,$$

wobei

$$\phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \psi(t)$$

und

$$G : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \text{ unitär, } f \mapsto Gf,$$

mit

$$(Gf)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-it)} f\left(\frac{1+it}{1-it}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**4.1 Lemma:** Für jedes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^\ell \psi(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2t^\ell \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) e^{-itx} dt = \frac{2}{\pi} i^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell} \left\{ \frac{\sin(x)}{x} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Offensichtlich ist  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  sowie  $\int_{\mathbb{R}} |t^\alpha| \psi(t) dt < \infty$  für jedes  $\alpha \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ . Daher folgt die Behauptung mit Lemma 1.2 und  $\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-itx} dt$  für  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Sei  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Wegen

$$\psi_\ell(t) := \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^\ell \phi\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^\ell \psi(t) = 2 \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^\ell \mathbf{1}_{[-1,1]}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

ist  $S_{\psi_\ell}$  unitär äquivalent zu  $G^* S_{\psi_\ell} G = S_{z(z^\ell \phi)} = S_{z^{\ell+1} \phi}$ . Im Folgenden werden wir die Fourier-Transformierte von  $t \mapsto \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^\ell \psi(t)$  berechnen. Erst einmal bemerken wir, dass

$$\frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt. Wir definieren  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ , und  $\tilde{\psi}_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto (1+it)^{2\ell} \cdot \psi(t)$ . Zu bestimmen ist also die Fourier-Transformierte von  $\xi^\ell \cdot \tilde{\psi}_\ell$ .

Zunächst berechnen wir  $\mathcal{F}\tilde{\psi}_\ell$ . Offensichtlich ist  $\tilde{\psi}_\ell \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz und der Linearität der Fourier-Transformation liefert Lemma 4.1

**4.2 Lemma:** Für jedes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\tilde{\psi}_\ell)(w) &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{n=0}^{2\ell} \binom{2\ell}{n} i^n \cdot i^n \frac{d^n}{dw^n} \frac{\sin(w)}{w} \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{n=0}^{2\ell} \binom{2\ell}{n} (-1)^n \frac{d^n}{dw^n} \frac{\sin(w)}{w}, \quad w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$  ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ ; eingeschränkt auf  $\mathbb{R}$  sind die Funktion  $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$  sowie die Ableitungen beliebiger Ordnung jeweils beschränkt.

**Beweis:** Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung  $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$  die behaupteten Eigenschaften besitzt. Wir definieren die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  durch  $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$  bzw.  $a_{2n+1} = 0$ . Mit Hilfe der Stirling-Formel berechnen wir

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n+1)!}} \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m}{m!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{e}{m}\right)^m \cdot \frac{1}{m+1}} \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt[2m]{2\pi m}} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also ist die Abbildung  $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ .

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Durch Anwenden der Leibniz-Formel erhalten wir

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j j! x^{-j-1} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \sin(x) \rightarrow 0$$

für  $|x| \rightarrow \infty$ , wobei hier nur Folgen reeller Zahlen zugelassen sind. Damit ist Lemma 4.2 vollständig bewiesen.  $\square$

**4.3 Satz:** Für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  ist die Fourier-Transformierte von  $\xi^\ell$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\{\xi^\ell\})(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{2^{\ell-1}} \cdot e^{-|w|} p_\ell(|w|), \quad w \in \mathbb{R}, \text{ wobei} \\ p_\ell(w) &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} w^{\ell-j-1}, \quad w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**4.4 Bemerkung** (zu Satz 4.3): Wenn wir ein konkretes  $\ell \in \mathbb{N}$  betrachten, z. B.  $\ell = 5$  oder  $\ell = 10$ , so gibt Maple ein Ergebnis für die Fourier-Transformierte von  $\xi^\ell$  aus. Die Formel aus Satz 4.3 ist in mühsamer Arbeit und in mehreren Schritten gefunden worden. Zunächst ließ ich Maple die Fourier-Transformierte von  $\xi^\ell$  für  $\ell = 1, \dots, 6$  ausgeben. Dann habe ich nach Regelmäßigkeiten in den Folgen der Koeffizienten gesucht und in mehreren Schritten eine Darstellung von  $\mathcal{F}\{\xi^\ell\}$  für allgemeine  $\ell \in \mathbb{N}$  gefunden. Zwei bis drei Wochen nach dieser Prozedur stieß ich in der Bibliothek auf eine mir bis dahin nicht bekannte Formelsammlung, nämlich „Tabellen zur Fourier Transformation“ [15] von Oberhettinger. Dort findet man auf S. 202 die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{a^2 + (x \pm b)^2\}^\nu} \cdot e^{ixy} dx = 2e^{\mp iby} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{|y|}{2a}\right)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(a|y|), \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0,$$

wobei  $\Gamma$  die Gammafunktion bezeichne und

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}, \\ I_\nu(z) &= e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ze^{i\pi/2}), \\ J_\nu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $a = 1$ ,  $b = 0$  und  $\nu = \ell \in \mathbb{N}$  sind wir in der Situation des Satzes 4.3, und es folgt, dass

$$\mathcal{F}\{\xi^\ell\}(y) = \sqrt{2} \frac{1}{(\ell-1)!} \left(\frac{|y|}{2}\right)^{\ell-1/2} K_{\ell-1/2}(|y|), \quad y \in \mathbb{R},$$

zur Formel für  $\mathcal{F}\{\xi^\ell\}$  aus Satz 4.3 äquivalent ist, für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Wir benötigen das folgende

**4.5 Lemma:** Für jedes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\ell e^{-|x|} e^{-|y-x|} dx = \frac{e^{-|y|}}{\ell+1} \left\{ |y|^{\ell+1} + \sum_{j=0}^{\ell-1} 2^{-1-j} \cdot \frac{(\ell+1)!}{(\ell-j)!} \cdot |y|^{\ell-j} + \frac{(\ell+1)!}{2^\ell} \right\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass die leere Summe den Wert null hat.

**Beweis:** Für  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  betrachten wir

$$I_1 := \int_0^{\infty} x^\ell e^{-x} e^{-y+x} \mathbf{1}_{\{x < y\}}(x) dx = e^{-y} \int_0^y x^\ell dx \cdot \operatorname{Heaviside}(y) = e^{-y} \frac{y^{\ell+1}}{\ell+1} \cdot \operatorname{Heaviside}(y),$$

$$I_2 := \int_0^{\infty} x^\ell e^{-x} e^{y-x} \mathbf{1}_{\{x > y\}}(x) dx,$$

$$I_3 := \int_{-\infty}^0 (-x)^\ell e^x e^{-y+x} \mathbf{1}_{\{x < y\}}(x) dx,$$

$$I_4 := \int_{-\infty}^0 (-x)^\ell e^x e^{y-x} \mathbf{1}_{\{x > y\}}(x) dx = e^y \int_y^0 (-x)^\ell dx \cdot \operatorname{Heaviside}(-y) = e^y \frac{(-y)^{\ell+1}}{\ell+1} \cdot \operatorname{Heaviside}(-y).$$

Es gilt

$$I_2 = e^y \left\{ \int_0^{\infty} x^\ell e^{-2x} dx \cdot \operatorname{Heaviside}(-y) + \int_y^{\infty} x^\ell e^{-2x} dx \cdot \operatorname{Heaviside}(y) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^y \left\{ \frac{1}{2^{\ell+1}} \int_0^\infty x^\ell e^{-x} dx \cdot \text{Heaviside}(-y) + \frac{1}{2^{\ell+1}} \int_{2y}^\infty x^\ell e^{-x} dx \cdot \text{Heaviside}(y) \right\} \\
 &= e^y \left\{ \frac{\ell!}{2^{\ell+1}} \cdot \text{Heaviside}(-y) + \frac{e^{-2y}}{2^{\ell+1}} \sum_{j=0}^{\ell} (2y)^{\ell-j} \frac{\ell!}{(\ell-j)!} \cdot \text{Heaviside}(y) \right\} \\
 &= e^{-|y|} \left\{ \frac{\ell!}{2^{\ell+1}} \cdot \text{Heaviside}(-y) + \frac{1}{2^{\ell+1}} \sum_{j=0}^{\ell} (2y)^{\ell-j} \frac{\ell!}{(\ell-j)!} \cdot \text{Heaviside}(y) \right\}.
 \end{aligned}$$

Analog berechnen wir

$$\begin{aligned}
 I_3 &= e^{-y} \left\{ \int_{-\infty}^0 (-x)^\ell e^{2x} dx \cdot \text{Heaviside}(y) + \int_{-\infty}^y (-x)^\ell e^{2x} dx \cdot \text{Heaviside}(-y) \right\} \\
 &= e^{-|y|} \left\{ \frac{\ell!}{2^{\ell+1}} \cdot \text{Heaviside}(y) + \frac{1}{2^{\ell+1}} \sum_{j=0}^{\ell} (2y)^{\ell-j} \frac{\ell!}{(\ell-j)!} \cdot \text{Heaviside}(-y) \right\}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty |x|^\ell e^{-|x|} e^{-|y-x|} dx &= \int_0^\infty x^\ell e^{-x} e^{-|y-x|} dx + \int_{-\infty}^0 (-x)^\ell e^x e^{-|y-x|} dx \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
 &= \frac{e^{-|y|}}{\ell+1} \left\{ |y|^{\ell+1} + \frac{(\ell+1)!}{2^{\ell+1}} + \sum_{j=0}^{\ell} 2^{-1-j} \cdot \frac{(\ell+1)!}{(\ell-j)!} \cdot |y|^{\ell-j} \right\} \\
 &= \frac{e^{-|y|}}{\ell+1} \left\{ |y|^{\ell+1} + \sum_{j=0}^{\ell-1} 2^{-1-j} \cdot \frac{(\ell+1)!}{(\ell-j)!} \cdot |y|^{\ell-j} + \frac{(\ell+1)!}{2^\ell} \right\},
 \end{aligned}$$

und zusammen mit  $\int_{-\infty}^\infty |x|^\ell e^{-|x|} e^{-|0-x|} dx = 2 \int_0^\infty x^\ell e^{-2x} dx = \frac{\ell!}{2^\ell}$  folgt die Behauptung.  $\square$

Jetzt können wir Satz 4.3 beweisen.

**Beweis des Satzes 4.3:** Zunächst bemerken wir, dass wegen

$$\int_{-\infty}^\infty |\xi(t)|^m dt = \int_{-\infty}^\infty (1+t^2)^{-m} dt \leq \int_{-\infty}^\infty (1+t^2)^{-1} dt = \pi < \infty, \quad m \in \mathbb{N} \text{ beliebig,}$$

für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  gilt:  $\xi^\ell \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Der Beweis des Satzes 4.3 erfolgt nun durch vollständige Induktion nach  $\ell \in \mathbb{N}$ . Für  $\ell = 1$  zeigen wir

$$(\mathcal{F}\{\xi\})(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|w|}, \quad w \in \mathbb{R},$$

über die Umkehrfunktion  $\mathcal{F}^{-1}$ . Es gilt

$$\left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|w|} \right\} \right) (t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-|w|} e^{itw} dw = \int_0^\infty e^{-w} \cos(tw) dw = 1 - t^2 \int_0^\infty e^{-w} \cos(tw) dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

wie man leicht mit partieller Integration nachrechnet. Daher gilt

$$\left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|w|} \right\} \right) (t) = \int_0^\infty e^{-w} \cos(tw) dw = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Behauptung bis  $\ell$  gilt, und zeigen, dass die Behauptung auch für  $\ell + 1$  wahr ist. Mit Hilfe des Satzes 1.1 (ii), der Induktionsvoraussetzung, des Lemmas 4.5 und eines Koeffizientenvergleichs berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\{\xi^{\ell+1}\})(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ((\mathcal{F}\{\xi^\ell\}) * (\mathcal{F}\xi))(w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} ((e^{-|x|} |x|^{\ell-j-1}) * (e^{-|x|}))(w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} e^{-|w|} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j)!} \left\{ |w|^{\ell-j} + \sum_{m=0}^{\ell-j-2} 2^{-1-m} \frac{(\ell-j)!}{(\ell-1-j-m)!} |w|^{\ell-1-j-m} + \frac{(\ell-j)!}{2^{\ell-j-1}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} e^{-|w|} \left\{ \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} + \sum_{\beta=1}^{\ell} \frac{1}{2^{\ell-\beta}} \frac{1}{\beta!} \sum_{\alpha=0}^{\ell-\beta} \binom{\ell+\alpha-1}{\ell-1} |w|^\beta \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} e^{-|w|} \left\{ \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{2\ell-2} \binom{\tilde{j}}{\ell-1} + \sum_{\beta=1}^{\ell} \frac{1}{2^{\ell-\beta}} \frac{1}{\beta!} \sum_{\tilde{\alpha}=0}^{2\ell-\beta-1} \binom{\tilde{\alpha}}{\ell-1} |w|^\beta \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} e^{-|w|} \left\{ \frac{1}{2^{\ell-1}} \binom{2\ell-1}{\ell} + \sum_{\beta=1}^{\ell} \frac{1}{2^{\ell-\beta}} \frac{1}{\beta!} \binom{2\ell-\beta}{\ell} |w|^\beta \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2^\ell} e^{-|w|} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j}{\ell} \frac{1}{(\ell-j)!} |w|^{\ell-j}, \quad w \in \mathbb{R};
\end{aligned}$$

man beachte, dass  $\frac{1}{2^\ell} \binom{2\ell}{\ell} = \frac{1}{2^\ell} \left\{ \binom{2\ell-1}{\ell-1} + \binom{2\ell-1}{\ell} \right\} = \frac{1}{2^{\ell-1}} \binom{2\ell-1}{\ell}$ . Damit ist Satz 4.3 vollständig bewiesen.  $\square$

Dies führt zu

**4.6 Folgerung:** Für die Funktionen

$$k^{(\ell)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto k^{(\ell)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell(t) e^{-itx} dt, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

gilt

$$\begin{aligned}
k^{(\ell)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}\{\xi^\ell \cdot \tilde{\psi}_\ell\})(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{2\ell} \frac{(-1)^n}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} \binom{2\ell}{n} \frac{d^n}{dx^n} \left( (e^{-|w|} |w|^{\ell-j-1}) * \left( \frac{\sin(w)}{w} \right) \right) (x) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{d^n}{dx^n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{\sin(w)}{w} \right) \right) (x).
\end{aligned}$$

**Beweis:** Wie wir bereits bemerkt haben, gilt  $\xi^\ell, \tilde{\psi}_\ell \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Durch Anwenden des Satzes 1.1 (ii) mit den Funktionen  $\mathcal{F}\tilde{\psi}_\ell$  aus Lemma 4.2 und  $\mathcal{F}\{\xi^\ell\}$  aus Satz 4.3 ergibt sich mit der Linearität der Faltung, dass

$$k^{(\ell)}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{d^n}{dw^n} \frac{\sin(w)}{w} \right) \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nach Lemma 4.2 ist die durch  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  definierte Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar; letztere Funktion sowie sämtliche Ableitungen davon sind jeweils beschränkt. Offensichtlich ist die Funktion  $x \mapsto e^{-|x|} p_\ell(|x|)$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Mit dem Differentiationssatz der Faltung erhalten wir die behauptete Darstellungsformel der Funktionen  $k^{(\ell)}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**4.7 Satz:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten den Integraloperator  $K^{(\ell)} : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  mit Kern  $k^{(\ell)}(x+y)$ , der auf  $\mathcal{D}(0, \infty) \subset L^2(0, \infty)$  gegeben ist durch

$$(K^{(\ell)}f)(x) = \int_0^\infty k^{(\ell)}(x+y) f(y)dy, \quad f \in \mathcal{D}(0, \infty), \quad x > 0.$$

Analog definieren wir den Integraloperator  $K^{(0)}$  auf  $L^2(0, \infty)$  mit Kern  $k^{(0)}(x+y) := \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ . Dann ist  $K^{(\ell)}$  ein beschränkter selbstadjungierter Hankel-Operator, der unitär äquivalent zu  $S_{\psi_\ell}$  mit Symbol  $\psi_\ell$  auf  $H^2(\mathbb{R})$  ist, und  $S_{\psi_\ell}$  ist unitär äquivalent zu  $G^*S_{\psi_\ell}G = S_{z(z^\ell\phi)} = S_{z^{\ell+1}\phi}$  auf  $H^2$ , für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Dabei bezeichne  $\phi$  die in (4.1) definierte Funktion.

**Beweis:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 4.17 ist die Funktion  $k^{(\ell)}$  stetig auf  $(0, \infty)$ , und es gilt  $k^{(\ell)}(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $x \rightarrow 0+$  und für  $x \rightarrow \infty$ . Die Funktion  $\psi_\ell = \xi^\ell \cdot \tilde{\psi}_\ell$  aus (4.2) ist offensichtlich in  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , und nach Folgerung 4.6 gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi_\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{\xi^\ell \cdot \tilde{\psi}_\ell\} = k^{(\ell)}$$

sogar auf ganz  $\mathbb{R}$ . Mit Satz 2.9 und Satz 2.12 folgt, dass der Integraloperator  $K^{(\ell)}$  mit Kern  $k^{(\ell)}(x+y)$  der eindeutig bestimmte beschränkte Hankel-Operator auf ganz  $L^2(0, \infty)$  ist, der auf dem dichten Teilraum  $\mathcal{D}(0, \infty)$  von  $L^2(0, \infty)$  definiert ist durch

$$(K^{(\ell)}f)(x) = \int_0^\infty k^{(\ell)}(x+y) f(y)dy, \quad f \in \mathcal{D}(0, \infty), \quad x > 0.$$

Nach Folgerung 4.6 ist die Funktion  $k^{(\ell)}$  reellwertig, also gilt  $\overline{k^{(\ell)}(y+x)} = k^{(\ell)}(x+y)$  für alle  $x, y > 0$ ; mithin ist  $K^{(\ell)}$  selbstadjungiert. Nach Satz 2.14 ist  $K^{(\ell)}$  unitär äquivalent zu  $S_{\psi_\ell}$  mit Symbol  $\psi_\ell$  auf  $H^2(\mathbb{R})$ , und  $S_{\psi_\ell}$  ist unitär äquivalent zu  $G^*S_{\psi_\ell}G = S_{z(z^\ell\phi)} = S_{z^{\ell+1}\phi}$  auf  $H^2$ .

Im Fall  $\ell = 0$  verfahren wir analog; man bemerke, dass die reellwertige Funktion  $k^{(0)}$  stetig auf  $(0, \infty)$  ist, dass  $k^{(0)}(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $x \rightarrow 0+$  und für  $x \rightarrow \infty$  gilt, und dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{2 \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}\} = k^{(0)}$$

sogar auf ganz  $\mathbb{R}$ , wobei  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . □

Im Folgenden werden wir für jedes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  den Integraloperator  $K^{(\ell)}$  „diagonalisieren“ und jeweils das Spektrum bestimmen. Das zentrale Resultat dieses Abschnittes ist

**4.8 Satz:** Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Definiere die Funktionen  $\rho_p : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  und  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  für  $\lambda > 0$  durch

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - p - i\sqrt{\lambda}\right) \right|^2$$

bzw.

$$h(\lambda) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\sqrt{\lambda})};$$

$\Gamma$  bezeichne die Gammafunktion. Für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  ist

(i)  $K^{(2m)}$  unitär äquivalent zu

$$M_{\frac{(-1)^m}{\pi}h} \oplus M_{\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}h} \text{ auf } L^2\left((0, \infty); \rho_{\frac{1}{2}-m}(\lambda)d\lambda\right) \oplus L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda)d\lambda\right).$$

Das Spektrum  $\sigma(K^{(2m)}) = [-1, 1]$  von  $K^{(2m)}$  ist rein absolutstetig, und jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt Multiplizität eins.

(ii)  $K^{(2m+1)}$  unitär äquivalent zu

$$M_{\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}h} \oplus M_{\frac{(-1)^m}{\pi}h} \text{ auf } L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda)d\lambda\right) \oplus L^2\left((0, \infty); \rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda)d\lambda\right).$$

Das Spektrum  $\sigma(K^{(2m+1)}) = [-1, 1]$  von  $K^{(2m+1)}$  ist rein absolutstetig, und jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt Multiplizität eins.

Der Beweis des Satzes 4.8 erfolgt in mehreren Schritten. Wir bemerken zunächst, dass  $K^{(\ell)}$  nach Satz 4.7 beschränkt und selbstadjungiert ist, und dass  $K^{(\ell)}$  unitär äquivalent zum Hankel-Operator  $S_{z^{\ell+1}\phi}$  auf  $H^2$  ist, für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$ .

**4.9 Lemma:** Für jedes  $x \in \ell_+^2$  gilt

$$(S_{z^{\ell+1}\phi}x)_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+\ell+n+1}x_k, \quad \ell \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $\phi$  die in (4.1) definierte Funktion sei und

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \phi(e^{i\theta}) d\theta = \frac{2}{\pi k} \sin(\pi k/2), \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Es gilt  $S_{z^{\ell+1}\phi} = PJ M_{z^{\ell+1}\phi}|_{H^2}$ . Für  $f \in H^2$ ,  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^j$ , berechnen wir

$$(JM_{z^{\ell+1}\phi}f)(z) = \phi(\bar{z}) \sum_{j=0}^{\infty} x_j \bar{z}^{j+\ell+1}$$

und damit

$$\begin{aligned} (S_{z^{\ell+1}\phi}f)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \phi(e^{-i\theta}) x_j e^{i\theta(-1-j-k-\ell)} \frac{d\theta}{2\pi} \right\} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(-1-j-k-\ell)} d\theta \right\} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+j+k+\ell)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1+j+k+\ell)\right) x_j \right\} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} c_{1+j+k+\ell} x_j \right\} z^k. \end{aligned}$$

□

Bezeichne mit  $\mathcal{P}_+$  bzw.  $\mathcal{P}_-$  die Orthogonalprojektion von  $\ell_+^2$  auf  $\mathcal{L}_+$  bzw.  $\mathcal{L}_-$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &= \{x \in \ell_+^2 : x_{2k+1} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}, \\ \mathcal{L}_- &= \{x \in \ell_+^2 : x_{2k} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Es sei  $p \leq 1/2$  eine reelle Zahl. Betrachte die Operatoren  $H_p : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  und  $\tilde{H}_p : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  mit

$$(H_p x)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{1+k+n-p}, \quad x \in \ell_+^2,$$

bzw.

$$\left(\tilde{H}_p x\right)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{1+k+n-p} x_k, \quad x \in \ell_+^2.$$

Nach Satz 3.27 ist  $H_p$  beschränkt und selbstadjungiert. Auf dem dichten Teilraum aller endlichen Linearkombinationen von Elementen der Orthonormalbasis  $e_0, e_1, e_2, \dots$  von  $\ell_+^2$  sind  $H_p$  und  $\tilde{H}_p$  unitär äquivalent. Dort gilt  $V\tilde{H}_pV = H_p$ , wobei der unitäre selbstinverse Operator  $V$  definiert ist durch

$$V : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2, (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_0, -x_1, x_2, -x_3, \dots). \quad (4.3)$$

Daher können wir  $\tilde{H}_p$  eindeutig zum oben definierten Operator auf ganz  $\ell_+^2$  fortsetzen.

Wir betrachten nun den Fall, dass  $\ell \in \mathbb{N}_0$  gerade ist, d. h.  $\ell = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_+ S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_+ x)_{2n} &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{k+m+n+1/2} x_{2k}, \\ (\mathcal{P}_- S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_- x)_{2n+1} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{k+m+n+3/2} x_{2k+1}, \\ \mathcal{P}_+ S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_- &= 0 = \mathcal{P}_- S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_+. \end{aligned}$$

Definiere

$$\mathcal{U}_+ : \ell_+^2 \rightarrow \mathcal{U}_+(\ell_+^2), x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots)$$

und

$$\mathcal{U}_- : \ell_+^2 \rightarrow \mathcal{U}_-(\ell_+^2), x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots).$$

Dann sind  $\mathcal{U}_+$  und  $\mathcal{U}_-$  unitär, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_+^{-1} \circ (\mathcal{P}_+ S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_+) \circ \mathcal{U}_+ &= \frac{(-1)^m}{\pi} \tilde{H}_{\frac{1}{2}-m}, \\ \mathcal{U}_-^{-1} \circ (\mathcal{P}_- S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_-) \circ \mathcal{U}_- &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_+ &\text{ lässt } \mathcal{U}_+(\ell_+^2) \text{ invariant,} \\ \mathcal{P}_- S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_- &\text{ lässt } \mathcal{U}_-(\ell_+^2) \text{ invariant.} \end{aligned}$$

Daher kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_+(\ell_+^2) \oplus \mathcal{U}_-(\ell_+^2) & \xrightarrow{\quad} & (\mathcal{P}_+ S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_+) \oplus (\mathcal{P}_- S_{z^{2m+1}\phi} \mathcal{P}_-) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U}_+(\ell_+^2) \oplus \mathcal{U}_-(\ell_+^2) \\ \uparrow u_+ \oplus u_- & & & & \uparrow u_+ \oplus u_- \\ \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 & \xrightarrow{\quad} & \left(\frac{(-1)^m}{\pi} \tilde{H}_{\frac{1}{2}-m}\right) \oplus \left(\frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m}\right) & \xrightarrow{\quad} & \ell_+^2 \oplus \ell_+^2. \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (V \oplus V) \circ \left( \left( \frac{(-1)^m}{\pi} \tilde{H}_{\frac{1}{2}-m} \right) \oplus \left( \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m} \right) \right) \circ (V \oplus V) \\ = \left( \frac{(-1)^m}{\pi} H_{\frac{1}{2}-m} \right) \oplus \left( \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} \right), \end{aligned}$$

wobei  $V$  der unitäre selbstinverse Operator aus (4.3) ist. Andererseits ist die durch  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{P}_+(x) \oplus \mathcal{P}_-(x)$  definierte Abbildung  $\mathcal{U} : \ell_+^2 \rightarrow \mathcal{U}_+(\ell_+^2) \oplus \mathcal{U}_-(\ell_+^2)$  unitär, so dass wir insgesamt gezeigt haben:

**4.10 Lemma:** Der Operator  $S_{z^{2m+1}\phi} : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  ist für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  unitär äquivalent zum Operator  $\left(\frac{(-1)^m}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m}\right) \oplus \left(\frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m}\right) : \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_+^2$ .

Nun betrachten wir den Fall, dass  $\ell \in \mathbb{N}_0$  ungerade ist, d. h.  $\ell = 2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Man rechnet leicht nach, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_+ &= 0 = \mathcal{P}_- S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_-, \\ (\mathcal{P}_+ S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_- x)_{2n} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{k+m+n+3/2} x_{2k+1}, \\ (\mathcal{P}_- S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_+ x)_{2n+1} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{k+m+n+3/2} x_{2k}. \end{aligned}$$

Es sei  $x \oplus y \in \ell_+^2 \oplus \ell_+^2$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathcal{U}_+^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_-^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_+ S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_- \\ \mathcal{P}_- S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+^{-1}(\mathcal{P}_+ S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_-)(\mathcal{U}_- y) \\ \mathcal{U}_-^{-1}(\mathcal{P}_- S_{z^{2m+2}\phi} \mathcal{P}_+)(\mathcal{U}_+ x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m}(y) \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \tilde{H}_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \end{bmatrix}.$$

Andererseits ist die durch  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{P}_+(x) \oplus \mathcal{P}_-(x)$  definierte Abbildung  $\mathcal{U} : \ell_+^2 \rightarrow \mathcal{U}_+(\ell_+^2) \oplus \mathcal{U}_-(\ell_+^2)$  unitär, so dass wir insgesamt gezeigt haben:

**4.11 Lemma:** Der Operator  $S_{z^{2m+2}\phi} : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  ist für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  unitär äquivalent zum Operator

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \end{bmatrix} : \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_+^2.$$

Die Abbildung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} : \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_+^2$$

ist unitär mit Inverser

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} : \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_+^2.$$

Wir berechnen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^m}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m} \end{bmatrix}.$$

Wir haben gezeigt:

**4.12 Lemma:** Der Operator  $S_{z^{2m+2}\phi} : \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2$  ist für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  unitär äquivalent zum Operator  $\left(\frac{(-1)^{m+1}}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m}\right) \oplus \left(\frac{(-1)^m}{\pi} H_{-\frac{1}{2}-m}\right) : \ell_+^2 \oplus \ell_+^2 \rightarrow \ell_+^2 \oplus \ell_+^2$ .

Mit Hilfe der Lemmata 4.10 und 4.12 können wir nun Satz 4.8 beweisen.

**Beweis des Satzes 4.8:** Nach Satz 3.27 gilt

$$\mathcal{V}_p \circ H_p \circ \mathcal{V}_p^{-1} = M_h$$

für jedes  $p \leq 1/2$ , insbesondere für  $p \in \{\frac{1}{2} - m : m \in \mathbb{N}_0\}$ . Folglich sind  $\frac{1}{\pi}H_p$  bzw.  $-\frac{1}{\pi}H_p$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $M_{\tilde{h}}$  bzw.  $M_{-\tilde{h}}$  auf  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$ , wobei  $\tilde{h} := h/\pi$  und  $p \in \{\frac{1}{2} - m : m \in \mathbb{N}_0\}$ . Die beiden Multiplikationsoperatoren  $M_{\tilde{h}}$  und  $M_{-\tilde{h}}$  auf  $L^2((0, \infty); \rho_p(\lambda)d\lambda)$  erfüllen offensichtlich die Voraussetzungen des Satzes A.18, sind also jeweils unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator

$$M_{\mathbf{t}} \text{ auf } L^2((0, 1); |(\tilde{h}^{-1})'(t)|\rho_p(\tilde{h}^{-1}(t))dt) \text{ bzw. } L^2((-1, 0); |(\tilde{h}^{-1})'(-t)|\rho_p(\tilde{h}^{-1}(-t))dt),^7$$

für jedes  $p \in \{\frac{1}{2} - m : m \in \mathbb{N}_0\}$ . Mit Satz A.20, dessen Voraussetzungen offensichtlich erfüllt sind, folgt, dass der Operator

$$M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}} \text{ auf } L^2((-1, 0); |(\tilde{h}^{-1})'(-t)|\rho_{p_1}(\tilde{h}^{-1}(-t))dt) \oplus L^2((0, 1); |(\tilde{h}^{-1})'(t)|\rho_{p_2}(\tilde{h}^{-1}(t))dt)$$

unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)$  ist, wobei

$$\tilde{\rho}_{p_1, p_2} : (-1, 1) \rightarrow [0, \infty), \quad \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t) := \begin{cases} |(\tilde{h}^{-1})'(-t)| \rho_{p_1}(\tilde{h}^{-1}(-t))dt, & \text{wenn } t \in (-1, 0) \\ 1, & \text{wenn } t = 0 \\ |(\tilde{h}^{-1})'(t)| \rho_{p_2}(\tilde{h}^{-1}(t)), & \text{wenn } t \in (0, 1) \end{cases},$$

und  $p_1, p_2 \in \{\frac{1}{2} - m : m \in \mathbb{N}_0\}$ . Zudem ist nach Satz A.20 das Spektrum  $[-1, 1]$  von  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)$  rein kontinuierlich, und jeder Punkt in  $[-1, 1]$  besitzt die Multiplizität eins, wobei  $p_1, p_2 \in \{\frac{1}{2} - m : m \in \mathbb{N}_0\}$  für den Rest dieses Beweises beliebig, aber fest gewählt sind.

Wie wir bereits bemerkt haben, ist der Operator  $K^{(\ell)}$  nach Satz 4.7 beschränkt und selbstadjungiert, und  $K^{(\ell)}$  ist unitär äquivalent zum Hankel-Operator  $S_{z^{\ell+1}\phi}$  auf  $H^2$ , für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Zusammen mit den Lemmata 4.10 und 4.12 folgt nun Satz 4.8 (bis auf die Behauptung, dass das vorliegende Spektrum absolutstetig ist).

Nach Satz 1.13 ist das Spektralmaß  $E$  zu  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)$  gegeben durch

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)), \quad E_A f = \mathbb{1}_{A \cap [-1, 1]} \cdot f,$$

wobei  $f \in L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)$ . Sei  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  eine Lebesgue-Nullmenge. Dann gilt für jedes  $f \in L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)$ , dass

$$\langle E_A f, f \rangle_{L^2((-1, 1); \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt)} = \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{A \cap [-1, 1]}(t) |f(t)|^2 \tilde{\rho}_{p_1, p_2}(t)dt = 0.$$

Damit ist Satz 4.8 vollständig bewiesen. □

Um die Darstellung der Dichtefunktion  $\rho_p$  in den Fällen  $\rho_{\frac{1}{2}-m}(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma(m - i\sqrt{\lambda}) \right|^2$  und  $\rho_{-\frac{1}{2}-m}(\lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sinh(2\pi\sqrt{\lambda}) \left| \Gamma(1 + m - i\sqrt{\lambda}) \right|^2$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  zu vereinfachen, zeigen wir

**4.13 Bemerkung:** Es sei  $m \in \mathbb{N}_0$ . Für alle  $\lambda > 0$  gilt

$$\left| \Gamma(m - i\sqrt{\lambda}) \right|^2 = \prod_{j=0}^{m-1} (j^2 + \lambda) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sinh(\pi\sqrt{\lambda})}. \quad (4.4)$$

<sup>7</sup>Für jedes  $t \in (-1, 0)$  gilt  $(-\tilde{h})^{-1}(t) = \tilde{h}^{-1}(-t)$ , und mit der Kettenregel folgt  $((-\tilde{h})^{-1})'(t) = -(\tilde{h}^{-1})'(-t)$ .

**Beweis:** Bekanntlich ist  $\overline{\Gamma(it)} = \Gamma(\overline{it}) = \Gamma(-it)$  für jedes  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zu  $\lambda > 0$  setze  $z = -i\sqrt{\lambda}$ . Dann gilt

$$\Gamma(1-z) = -z \Gamma(-z) = -z \Gamma(\bar{z}) = -z \overline{\Gamma(z)},$$

also

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z) \cdot (-z)\overline{\Gamma(z)} = -z |\Gamma(z)|^2$$

und damit

$$\left| \Gamma(-i\sqrt{\lambda}) \right|^2 = |\Gamma(z)|^2 = -\frac{1}{-i\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{\sin(-i\pi\sqrt{\lambda})} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{2\pi}{e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sinh(\pi\sqrt{\lambda})}. \quad (*)$$

Sei nun  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - m\right) - i\sqrt{\lambda}\right) = \Gamma(m - i\sqrt{\lambda}) = \prod_{j=0}^{m-1} (j - i\sqrt{\lambda}) \cdot \Gamma(-i\sqrt{\lambda}), \quad (**)$$

denn für  $m = 1$  ist  $\Gamma(1 - i\sqrt{\lambda}) = -i\sqrt{\lambda} \cdot \Gamma(-i\sqrt{\lambda})$ , und wenn die Formel (\*\*) für ein  $m \in \mathbb{N}$  wahr ist, so folgt

$$\Gamma(m+1-i\sqrt{\lambda}) = (m-i\sqrt{\lambda}) \cdot \Gamma(m-i\sqrt{\lambda}) = (m-i\sqrt{\lambda}) \cdot \prod_{j=0}^{m-1} (j-i\sqrt{\lambda}) \cdot \Gamma(-i\sqrt{\lambda}) = \prod_{j=0}^m (j-i\sqrt{\lambda}) \cdot \Gamma(-i\sqrt{\lambda}).$$

Insgesamt erhalten wir mit (\*) und (\*\*), dass

$$\left| \Gamma(m - i\sqrt{\lambda}) \right|^2 = \prod_{j=0}^{m-1} (j^2 + \lambda) \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sinh(\pi\sqrt{\lambda})}.$$

□

A posteriori ist mir aufgefallen, dass zumindest die Formel

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

in der Funktionentheorie wohlbekannt ist.

## 4.1 Eigenschaften der Funktionen $k^{(\ell)}$ für $\ell \in \mathbb{N}$

Den gesamten Abschnitt 4.1 habe ich ohne Vorlage aus irgendeiner Veröffentlichung erstellt.

Für  $\ell = 0$  ist die Funktion  $k^{(0)} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $k^{(0)}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}$  gegeben; diese Funktion bedarf keiner weiteren Untersuchung. Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften der Funktionen  $k^{(\ell)}$  für  $\ell \in \mathbb{N}$  beweisen, ohne die Faltung in der Darstellungsformel aus Folgerung 4.6 explizit zu berechnen. Zunächst formulieren wir einige Resultate, die im Verlauf dieses Abschnittes benötigt werden.

**4.14 Lemma:** *Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$(i) \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\cos((\ell-j)\pi/4)}{2^{(\ell+j-2)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} = 1.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{2n} = \cos(\ell\pi/2) \cdot 2^\ell = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \ell \text{ ungerade ist,} \\ (-1)^{\ell/2} \cdot 2^\ell, & \text{wenn } \ell \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\ell-1} (-1)^{n+1} \binom{2\ell}{2n+1} = \sin(-\ell\pi/2) \cdot 2^\ell = \begin{cases} (-1)^{(\ell+1)/2} \cdot 2^\ell, & \text{wenn } \ell \text{ ungerade ist,} \\ 0, & \text{wenn } \ell \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

**Beweis:** Die zweite Gleichheit in Punkt (ii) und (iii) ist jeweils offensichtlich.

(i) Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Definiere  $a_\ell := \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{e^{i \cdot (\ell-j)\pi/4}}{2^{(\ell+j)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} a_{\ell+1} &= \sum_{j=0}^{\ell} \frac{e^{i \cdot (\ell+1-j)\pi/4}}{2^{(\ell+1+j)/2}} \binom{\ell+j}{\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \frac{e^{i \cdot (\ell+1-j)\pi/4}}{2^{(\ell+1+j)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e^{i \cdot (\ell+1-j)\pi/4}}{2^{(\ell+1+j)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell} \\ &= \frac{1+i}{2} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{e^{i \cdot (\ell-j)\pi/4}}{2^{(\ell+j)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} + \frac{1}{2^\ell} \binom{2\ell-1}{\ell-1} \right\} + \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell-1} \frac{e^{i \cdot (\ell-\tilde{j})\pi/4}}{2^{(\ell+\tilde{j}+2)/2}} \binom{\ell+\tilde{j}}{\ell} \\ &= a_\ell \cdot \frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell-1}{\ell-1} + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell} \frac{e^{i \cdot (\ell+1-\tilde{j})\pi/4}}{2^{(\ell+1+\tilde{j})/2}} \binom{\ell+\tilde{j}}{\ell} - \frac{e^{i\pi/4}}{2^\ell \cdot \sqrt{2}} \binom{2\ell}{\ell} \right\} \\ &= a_\ell \cdot \frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell-1}{\ell-1} + a_{\ell+1} \cdot \frac{1-i}{2} - \frac{1}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell}{\ell}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{j} := j - 1$ . Somit gilt

$$a_{\ell+1} \cdot \frac{1+i}{2} = a_\ell \cdot \frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell-1}{\ell-1} - \frac{1}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell}{\ell},$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} a_{\ell+1} &= a_\ell + \frac{1}{2^{\ell+1}} \cdot \left[ \binom{2\ell-1}{\ell-1} + \binom{2\ell-1}{\ell-1} - \binom{2\ell}{\ell} \right] + \frac{i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell}{\ell} \\ &= a_\ell + \frac{1}{2^{\ell+1}} \cdot \left[ \binom{2\ell-1}{\ell-1} - \binom{2\ell-1}{\ell} \right] + \frac{i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell}{\ell} \\ &= a_\ell + \frac{i}{2^{\ell+1}} \binom{2\ell}{\ell}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} = \operatorname{Re}(a_1) = \dots = \operatorname{Re}(a_\ell) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\cos((\ell-j)\pi/4)}{2^{(\ell+j)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1}$$

und damit

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\cos((\ell-j)\pi/4)}{2^{(\ell+j-2)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} = 1.$$

(ii) Es sei  $\ell = 2\hat{\ell} - 1$ ,  $\hat{\ell} \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{2\hat{\ell}-1} (-1)^n \binom{4\hat{\ell}-2}{2n} = \sum_{\hat{n}=0}^{\hat{\ell}-1} \binom{4\hat{\ell}-2}{4\hat{n}} - \sum_{\hat{n}=0}^{\hat{\ell}-1} \binom{4\hat{\ell}-2}{4\hat{n}+2} = \sum_{\hat{n}=0}^{\hat{\ell}-1} \left[ \binom{4\hat{\ell}-2}{4\hat{n}} - \binom{4\hat{\ell}-2}{4\hat{\ell}-2-4\hat{n}} \right] = 0.$$

Sei nun  $\ell = 2\tilde{\ell}$ ,  $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$ . Wir berechnen

$$\sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}-1} (-1)^{n+1} \binom{4\tilde{\ell}}{2n+1} = - \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{\ell}-1} \binom{4\tilde{\ell}}{4\tilde{n}+1} + \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{\ell}-1} \binom{4\tilde{\ell}}{4\tilde{n}+3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\tilde{n}=0}^{\tilde{\ell}-1} \left[ \binom{4\tilde{\ell}}{4\tilde{\ell}-1-4\tilde{n}} - \binom{4\tilde{\ell}}{4\tilde{n}+1} \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{*}$$

Der Beweis von  $\sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n} = (-1)^{\tilde{\ell}} \cdot 2^{2\tilde{\ell}}$  erfolgt durch vollständige Induktion nach  $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$ .

Für  $\tilde{\ell} = 1$  gilt wie behauptet  $\sum_{n=0}^2 (-1)^n \binom{4}{2n} = -4$ . Wir nehmen nun an, dass die Formel für jede natürliche Zahl kleiner oder gleich  $\tilde{\ell}$  erfüllt ist. Im Induktionsschritt gilt wegen

$$\binom{4\tilde{\ell}+4}{2n} = \binom{4\tilde{\ell}}{2n-4} + 4 \binom{4\tilde{\ell}}{2n-3} + 6 \binom{4\tilde{\ell}}{2n-2} + 4 \binom{4\tilde{\ell}}{2n-1} + \binom{4\tilde{\ell}}{2n},$$

dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}+2} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}+4}{2n} &= \sum_{n=2}^{2\tilde{\ell}+2} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-4} + 4 \sum_{n=2}^{2\tilde{\ell}+1} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-3} + 6 \sum_{n=1}^{2\tilde{\ell}+1} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-2} \\
 &\quad + 4 \sum_{n=1}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-1} + \sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n} \\
 &= \sum_{n=2}^{2\tilde{\ell}+2} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-4} + 6 \sum_{n=1}^{2\tilde{\ell}+1} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-2} + \sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n},
 \end{aligned}$$

denn aus (\*) folgt mit Hilfe der Indexshifts  $\tilde{n} := n - 1$  und  $\hat{n} := n - 2$ , dass

$$\sum_{n=1}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-1} = \sum_{\tilde{n}=0}^{2\tilde{\ell}-1} (-1)^{\tilde{n}+1} \binom{4\tilde{\ell}}{2\tilde{n}+1} = 0$$

und

$$\sum_{n=2}^{2\tilde{\ell}+1} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-3} = - \sum_{\hat{n}=0}^{2\tilde{\ell}-1} (-1)^{\hat{n}+1} \binom{4\tilde{\ell}}{2\hat{n}+1} = 0.$$

Dieselben Indexshifts liefern

$$\sum_{n=1}^{2\tilde{\ell}+1} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-2} = - \sum_{\tilde{n}=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^{\tilde{n}} \binom{4\tilde{\ell}}{2\tilde{n}}$$

und

$$\sum_{n=2}^{2\tilde{\ell}+2} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n-4} = \sum_{\hat{n}=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^{\hat{n}} \binom{4\tilde{\ell}}{2\hat{n}}.$$

Insgesamt folgt nun mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}+2} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}+4}{2n} &= \sum_{\hat{n}=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^{\hat{n}} \binom{4\tilde{\ell}}{2\hat{n}} - 6 \sum_{\tilde{n}=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^{\tilde{n}} \binom{4\tilde{\ell}}{2\tilde{n}} + \sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}} (-1)^n \binom{4\tilde{\ell}}{2n} \\
 &= -4 \cdot (-1)^{\tilde{\ell}} \cdot 2^{2\tilde{\ell}} \\
 &= (-1)^{\tilde{\ell}+1} \cdot 2^{2(\tilde{\ell}+1)}.
 \end{aligned}$$

Damit ist Punkt (ii) bewiesen.

(iii) Für  $\ell = 2\tilde{\ell}$ ,  $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$ , haben wir bereits im Beweis von (ii) gezeigt, dass

$$\sum_{n=0}^{2\tilde{\ell}-1} (-1)^{n+1} \binom{4\tilde{\ell}}{2n+1} = 0.$$

Für  $\ell = 1$  ist wie behauptet  $\sum_{n=0}^0 (-1)^{n+1} \binom{2}{2n+1} = -2$ . Sei nun  $\ell = 2\hat{\ell} + 1$ ,  $\hat{\ell} \in \mathbb{N}$ . Dann gilt wegen

$$\binom{4\hat{\ell} + 2}{2n + 1} = \binom{4\hat{\ell}}{2n - 1} + 2 \binom{4\hat{\ell}}{2n} + \binom{4\hat{\ell}}{2n + 1}$$

und (ii) mit Hilfe des Indexshifts  $\tilde{n} := n - 1$ , dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2\hat{\ell}} (-1)^{n+1} \binom{4\hat{\ell} + 2}{2n + 1} &= \sum_{n=1}^{2\hat{\ell}} (-1)^{n+1} \binom{4\hat{\ell}}{2n - 1} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{2\hat{\ell}} (-1)^n \binom{4\hat{\ell}}{2n} + \sum_{n=0}^{2\hat{\ell}-1} (-1)^{n+1} \binom{4\hat{\ell}}{2n + 1} \\ &= - \sum_{\tilde{n}=0}^{2\hat{\ell}-1} (-1)^{\tilde{n}+1} \binom{4\hat{\ell}}{2\tilde{n} + 1} - 2 \cdot (-1)^{\hat{\ell}} \cdot 2^{2\hat{\ell}} + \sum_{n=0}^{2\hat{\ell}-1} (-1)^{n+1} \binom{4\hat{\ell}}{2n + 1} \\ &= (-1)^{\hat{\ell}+1} \cdot 2^{2\hat{\ell}+1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

**4.15 Lemma:** Es sei  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^m \sin(x - y) dy = \frac{m!}{2^{(m-1)/2}} \cos((m+1)\pi/4) \cdot \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^m \cos(x - y) dy = \frac{m!}{2^{(m-1)/2}} \cos((m+1)\pi/4) \cdot \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Es sei  $m \in \mathbb{N}_0$ .

(i) Aus dem Additionstheorem des Sinus und der exponentiellen Darstellung des Kosinus folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^m \sin(x - y) dy &= \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \sin(x - y) dy + \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \sin(x + y) dy \\ &= 2 \sin(x) \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \cos(y) dy \\ &= \sin(x) \left\{ \int_0^{\infty} e^{y(-1+i)} y^m dy + \int_0^{\infty} e^{y(-1-i)} y^m dy \right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie man mühelos mit vollständiger Induktion nach  $m \in \mathbb{N}_0$  beweist, gilt

$$\int_0^{\infty} e^{y(-1+i)} y^m dy = (-1)^{m+1} \frac{m!}{(-1+i)^{m+1}}$$

und

$$\int_0^{\infty} e^{y(-1-i)} y^m dy = (-1)^{m+1} \frac{m!}{(-1-i)^{m+1}}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{y(-1+i)} y^m dy + \int_0^{\infty} e^{y(-1-i)} y^m dy &= (-1)^{m+1} \frac{m!}{(-1+i)^{m+1}} + (-1)^{m+1} \frac{m!}{(-1-i)^{m+1}} \\ &= m! \left( (1-i)^{-(m+1)} + (1+i)^{-(m+1)} \right) \\ &= m! \left( \left( \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \right)^{-(m+1)} + \left( \sqrt{2} e^{i\pi/4} \right)^{-(m+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m!}{2^{(m+1)/2}} \left( e^{i(m+1)\pi/4} + e^{-i(m+1)\pi/4} \right) \\
 &= \frac{m!}{2^{(m-1)/2}} \cos((m+1)\pi/4).
 \end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Setze  $\tilde{x} = x + \pi/2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Wegen  $\sin(\tilde{x} - y) = \cos(x - y)$  folgt mit (i), dass

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^m \cos(x - y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^m \sin(\tilde{x} - y) dy \\
 &= \frac{m!}{2^{(m-1)/2}} \cos((m+1)\pi/4) \cdot \sin(\tilde{x}) \\
 &= \frac{m!}{2^{(m-1)/2}} \cos((m+1)\pi/4) \cdot \cos(x).
 \end{aligned}$$

□

**4.16 Lemma:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{d^n}{dw^n} \sin(w) \right) \right) (x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Mit Lemma 4.15 berechnen wir für jedes  $j \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \left( (e^{-|w|} |w|^{\ell-j-1}) * \left( \frac{d^n}{dw^n} \sin(w) \right) \right) (x) \\
 &= \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} (-1)^{\tilde{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^{\ell-j-1} \sin(x - y) dy \\
 &\quad + \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} (-1)^{\tilde{n}+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^{\ell-j-1} \cos(x - y) dy \\
 &= \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} (-1)^{\tilde{n}} \frac{(\ell-j-1)!}{2^{(\ell-j-2)/2}} \cos((\ell-j)\pi/4) \cdot \sin(x) \\
 &\quad + \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} (-1)^{\tilde{n}+1} \frac{(\ell-j-1)!}{2^{(\ell-j-2)/2}} \cos((\ell-j)\pi/4) \cdot \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.14 folgt nun, dass

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{d^n}{dw^n} \sin(w) \right) \right) (x) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{2\ell} \frac{(-1)^n}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} \binom{2\ell}{n} \left( (e^{-|w|} |w|^{\ell-j-1}) * \left( \frac{d^n}{dw^n} \sin(w) \right) \right) (x) \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} (-1)^{\tilde{n}} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} \frac{1}{2^{(\ell+j-2)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \cos((\ell-j)\pi/4) \cdot \sin(x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} (-1)^{\tilde{n}+1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} \frac{1}{2^{(\ell+j-2)/2}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \cos((\ell-j)\pi/4) \cdot \cos(x) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \left[ \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\binom{\ell+j-1}{\ell-1}}{2^{(\ell+j-2)/2}} \cos((\ell-j)\pi/4) \right] \cdot \left[ \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} (-1)^{\tilde{n}} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} \right] \cdot \sin(x) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \left[ \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\binom{\ell+j-1}{\ell-1}}{2^{(\ell+j-2)/2}} \cos((\ell-j)\pi/4) \right] \cdot \left[ \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} (-1)^{\tilde{n}+1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} \right] \cdot \cos(x) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \{ \cos(\ell\pi/2) \cdot \sin(x) + \sin(-\ell\pi/2) \cdot \cos(x) \} \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

□

**4.17 Satz:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

- (i)  $k^{(\ell)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Jede Ableitung beliebiger Ordnung von  $k^{(\ell)}$  ist in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Insbesondere existiert  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k^{(\ell)}(x)$  in  $\mathbb{R}$ .
- (ii)  $k^{(\ell)} = \mathcal{O}(x^{-1})$  für  $|x| \rightarrow \infty$ , d. h.  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x \cdot k^{(\ell)}(x)| \leq C < \infty$  für eine Konstante  $C > 0$ .
- (iii)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2)| = 0$ .

**Beweis:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ .

- (i) Als Fourier-Transformierte der quadratintegrablen Funktion  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^\ell \cdot \tilde{\psi}_\ell$  ist  $k^{(\ell)}$  quadratintegabel.

Wie wir bereits im Beweis der Folgerung 4.6 bemerkt haben, ist in der Darstellungsformel

$$k^{(\ell)}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{d^n}{dx^n} \left( (e^{-|w|} p_\ell(|w|)) * \left( \frac{\sin(w)}{w} \right) \right) (x), \quad x \in \mathbb{R},$$

der Differentiationssatz der Faltung beliebig oft anwendbar; mithin ist  $k^{(\ell)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ; insbesondere ist jede Ableitung beliebiger Ordnung von  $k^{(\ell)}$  in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

Um die Beschränktheit zu zeigen, sei  $m \in \mathbb{N}_0$  vorgegeben. Dann existieren

$$\begin{aligned}
 C'' &:= \max \left\{ \sup_{w \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^j}{dw^j} \frac{\sin(w)}{w} \right| : j \in \{0, 1, \dots, 2\ell + m\} \right\} > 0, \\
 C' &:= \max \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{j+\ell-1}} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} \binom{2\ell}{n} : j \in \{0, \dots, \ell-1\}, n \in \{0, \dots, 2\ell\} \right\} > 0, \\
 C &:= C' \cdot C'' > 0,
 \end{aligned}$$

in  $\mathbb{R}$ , und es gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d^m}{dx^m} k^{(\ell)}(x) \right| &\leq C \cdot \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^{\ell-j-1} dy \\
 &= 2(2\ell+1)C \cdot \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\ell-j-1} dy \\
 &= 2(2\ell+1)C \cdot \sum_{j=0}^{\ell-1} (\ell-j-1)! \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Diese endliche Konstante hängt nicht von  $x$  ab, also ist jede Ableitung beliebiger Ordnung von  $k^{(\ell)}$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Damit ist Punkt (i) bewiesen.

(ii) Mit (iii) gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x \cdot k^{(\ell)}(x)| &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \left( x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2) \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2) \right| \\ &\leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2) \right| + \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2) \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} =: C < \infty \end{aligned}$$

für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$ .

(iii) Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die Abbildungen

$$F_{2n} : z \mapsto z \cdot \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \frac{\sin(z)}{z} - (-1)^n \sin(z)$$

und

$$G_{2n+1} : z \mapsto z \cdot \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}} \frac{\sin(z)}{z} - (-1)^n \cos(z)$$

sind holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , denn dies trifft jeweils auf die Funktionen

$$z \mapsto z, \quad z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}, \quad z \mapsto \pm \sin(z) \quad \text{und} \quad z \mapsto \pm \cos(z)$$

zu. Zudem gilt mit der Leibniz-Formel

$$x \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \frac{\sin(x)}{x} - (-1)^n \sin(x) = \sum_{m=1}^{2n} \binom{2n}{m} (-1)^m m! x^{-m} \frac{d^{2n-m}}{dx^{2n-m}} \sin(x) \rightarrow 0$$

und

$$x \cdot \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \frac{\sin(x)}{x} - (-1)^n \cos(x) = \sum_{m=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (-1)^m m! x^{-m} \frac{d^{2n+1-m}}{dx^{2n+1-m}} \sin(x) \rightarrow 0$$

für  $|x| \rightarrow \infty$ , wobei hier nur Folgen reeller Zahlen zugelassen sind. Demnach sind  $F_{2n}, G_{2n+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  ist  $y \mapsto \|F_{2n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot e^{-|y|} |y|^j$  eine von  $x$  unabhängige integrable Majorante von  $y \mapsto e^{-|y|} |y|^j \cdot F_{2n}(x-y)$  und  $y \mapsto \|G_{2n+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \cdot e^{-|y|} |y|^j$  eine von  $x$  unabhängige integrable Majorante von  $y \mapsto e^{-|y|} |y|^j \cdot G_{2n+1}(x-y)$ , denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^j dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^j dy = 2 j! < \infty.$$

Insgesamt folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^j \cdot F_{2n}(x-y) dy = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^j \cdot G_{2n+1}(x-y) dy$$

für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und damit

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot F_{2n}(x-y) dy = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot G_{2n+1}(x-y) dy \quad (*)$$

für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Wie wir bereits gezeigt haben, ist die Funktion  $x \mapsto \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin(x)}{x}$  in  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 0$  für jede reelle Folge  $|x| \rightarrow \infty$ . Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^{j+1} dy = 2 \int_0^{\infty} e^{-y} y^{j+1} dy = 2 (j+1)! < \infty$$

ist  $y \mapsto \sup_{w \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^n}{dw^n} \frac{\sin(w)}{w} \right| \cdot e^{-|y|} |y|^{j+1}$  eine von  $x$  unabhängige integrable Majorante von  $y \mapsto e^{-|y|} |y|^j \cdot y \cdot \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin(x)}{x}$ , für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt nun, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^j \cdot y \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy = 0$$

für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und damit

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot y \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy = 0 \quad (**)$$

für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Nun können wir Punkt (iii) beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} & x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot \{(x-y) + y\} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} (-1)^m m! (x-y)^{-1-m} \cdot \frac{\partial^{2n-m}}{\partial x^{2n-m}} \sin(x-y) \right] dy \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \sin(x-y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) F_{2n}(x-y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot y \cdot \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot \{(x-y) + y\} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} (-1)^m m! (x-y)^{-1-m} \cdot \frac{\partial^{2n+1-m}}{\partial x^{2n+1-m}} \sin(x-y) \right] dy \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cos(x-y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) G_{2n+1}(x-y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) \cdot y \cdot \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy. \end{aligned}$$

Insgesamt sehen wir mit Lemma 4.16, dass

$$\begin{aligned} & \left| x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x - \ell\pi/2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_\ell(|y|) F_{2\tilde{n}}(x-y) dy \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_{\ell}(|y|) G_{2\tilde{n}+1}(x-y) dy \\
 & + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_{\ell}(|y|) \cdot y \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \Bigg| \\
 & \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell} \binom{2\ell}{2\tilde{n}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_{\ell}(|y|) F_{2\tilde{n}}(x-y) dy \right| \\
 & + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{\tilde{n}=0}^{\ell-1} \binom{2\ell}{2\tilde{n}+1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_{\ell}(|y|) G_{2\tilde{n}+1}(x-y) dy \right| \\
 & + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} \binom{2\ell}{n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} p_{\ell}(|y|) \cdot y \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \right| \\
 & \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

für  $|x| \rightarrow \infty$  nach (\*) und (\*\*), für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . □

**4.18 Folgerung:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

(i)  $k^{(\ell)} \in L^p(\mathbb{R})$  für alle  $p \in (1, \infty]$ .

(ii)  $k^{(\ell)} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

(iii)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| x \cdot k^{(\ell)}(x) - \frac{2}{\pi} \cdot (C_{\ell} \cdot \sin(x) + \tilde{C}_{\ell} \cdot \cos(x)) \right| = 0$ , wobei die Folgen  $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{C}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  wie folgt definiert sind:

$$C_{2j-1} = 0 \quad \text{und} \quad C_{2j} = (-1)^j$$

sowie

$$\tilde{C}_{2j-1} = (-1)^j \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{2j} = 0$$

für jedes  $j \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ .

(i) Wir wissen bereits aus Satz 4.17, dass  $k^{(\ell)} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ . Es seien  $p \in (1, \infty)$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |k^{(\ell)}(x)|^p dx &= \int_{-N}^N |k^{(\ell)}(x)|^p dx + \int_N^{\infty} \frac{1}{|x|^p} |x \cdot k^{(\ell)}(x)|^p dx + \int_{-\infty}^{-N} \frac{1}{|x|^p} |x \cdot k^{(\ell)}(x)|^p dx \\
 &\leq C_1 + C_2 \int_N^{\infty} \frac{1}{|x|^p} dx + C_2 \int_{-\infty}^{-N} \frac{1}{|x|^p} dx \\
 &= C_1 + 2C_2 \left[ \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_{x=N}^{x \rightarrow \infty} \\
 &= C_1 + \frac{2C_2}{p-1} N^{-p+1} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

wobei  $C_1 := 2N \cdot \|k^{(\ell)}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}^p < \infty$  nach (i) aus Satz 4.17 und  $C_2 := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x \cdot k^{(\ell)}(x)|^p < \infty$  nach (i) und (ii) aus Satz 4.17. Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Wir bezeichnen die offene Kugel mit Radius  $\rho > 0$  um eine reelle Zahl  $y$  mit  $B_\rho(y) \subset \mathbb{R}$ .

Setze  $\varepsilon := \frac{\pi}{4} > 0$ . Mit (iii) aus Satz 4.17 folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{(\ell)}(x_n)}{\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x_n - \ell\pi/2)}{x_n}} = 1$$

für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_\varepsilon((m + \ell/2)\pi)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ . Da die Funktion

$x \mapsto \frac{k^{(\ell)}(x)}{\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x}}$  stetig auf  $\Omega$  ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq \ell\pi/2$  derart, dass

$$\frac{k^{(\ell)}(x)}{\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x}} \geq 1 - \varepsilon > 0$$

für alle  $x \in [N, \infty) \cap \Omega$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |k^{(\ell)}(x)| dx &\geq \int_{\Omega \cap (N, \infty)} |k^{(\ell)}(x)| dx \\ &= \int_{\Omega \cap (N, \infty)} \left| \frac{2}{\pi} \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x} \right| \left| \frac{k^{(\ell)}(x)}{\frac{2}{\pi} \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x}} \right| dx \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\Omega \cap (N, \infty)} \left| \frac{\sin(x - \ell\pi/2)}{x} \right| dx \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N + \ell\pi/2, \infty)} \left| \frac{\sin(\tilde{x} - \ell\pi)}{\tilde{x} - \ell\pi/2} \right| d\tilde{x} \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N + \ell\pi/2, \infty)} \frac{|\sin(\tilde{x}) \cos(\ell\pi) - \cos(\tilde{x}) \sin(\ell\pi)|}{|\tilde{x}|} d\tilde{x} \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N + \ell\pi/2, \infty)} \frac{|\sin(\tilde{x})|}{\tilde{x}} d\tilde{x}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_\varepsilon((m + \ell)\pi) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_\varepsilon(m\pi)$  aus  $\Omega = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_\varepsilon((m + \ell/2)\pi)$  durch die Transformation  $\tilde{x} := x + \ell\pi/2$  entsteht. Daraus folgt wegen  $N \geq \ell\pi/2$  und  $|\sin(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  für alle  $x \in \tilde{\Omega}$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |k^{(\ell)}(x)| dx &\geq (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N + \ell\pi/2, \infty)} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{2}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N\pi + \pi/4, \infty)} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\tilde{\Omega} \cap (N\pi + \pi/4, \infty)} \frac{1}{x} dx \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} \int_{n\pi + \pi/4}^{n\pi + 3\pi/4} \frac{1}{x} dx \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\pi + 3\pi/4} \\ &\geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \end{aligned}$$

da die harmonische Reihe divergiert. Damit ist (ii) bewiesen.

(iii) Dies folgt unmittelbar aus (iii) des Satzes 4.17.  $\square$

## 4.2 Explizite Bestimmung der Funktionen $k^{(\ell)}$ für $\ell \in \mathbb{N}$

In diesem Abschnitt möchte ich die folgenden Eigenleistungen herausstellen: Lemma 4.19, Satz 4.20, Lemma 4.25, Lemma 4.26, Lemma 4.27 und Satz 4.28, alle samt Beweis. Zudem habe ich die einfache Folgerung 4.22 selbst bewiesen. Die exponentielle Integralfunktion ist schon seit langem bekannt, aber da ich für die meisten Eigenschaften weder einen Beweis noch eine Beweisidee in der Literatur gefunden habe, sind Lemma 4.19 und Satz 4.20 entstanden, die ich selbst bewiesen habe.

Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Wir benötigen den Integralkern  $(x, y) \mapsto k^{(\ell)}(x+y)$  als Abbildung  $(0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zur Darstellung des Integraloperators  $K^{(\ell)}$ . Im vorangegangenen Abschnitt war es möglich, alle Beweise für reelle  $x$  zu führen, d. h. für  $k^{(\ell)}$  als Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , ohne dass dadurch ein Mehraufwand entstand. In diesem Abschnitt betrachten wir  $x > 0$ . Zur Darstellung der Funktion  $k^{(\ell)}$  benötigen wir sogenannte exponentielle Integrale.

Schreibe  $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ . Definiere für  $z \in \mathbb{C}^-$  die Funktion

$$F_N : z \mapsto F_N(z) := e^{-z} \int_0^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt, \quad N \in \mathbb{N},$$

wobei  $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  die geschlitzte Ebene bezeichne.

**4.19 Lemma:** *Es sei  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:*

(i)  $F_N$  ist holomorph in  $\mathbb{C}^-$ .

(ii) Für jedes  $z \in \mathbb{C}^-$  existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-z} \int_0^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt$  in  $\mathbb{C}$ .

(iii) Die Funktion  $z \mapsto F(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-z} \int_0^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt$  ist holomorph in  $\mathbb{C}^-$ .

**Beweis:** Es sei  $N \in \mathbb{N}$ . Die Menge  $(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{C}$  ist offensichtlich ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Polarkoordinaten-Transformation

$$(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}^-, \quad (r, \theta) \mapsto re^{i\theta},$$

ist bekanntermaßen ein Diffeomorphismus, insbesondere ein Homöomorphismus. Daher ist das Bild der Polarkoordinaten-Transformation,  $\mathbb{C}^-$ , ein einfach zusammenhängendes Gebiet; zudem ist  $\zeta \mapsto e^{-\zeta}/\zeta$  holomorph in  $\mathbb{C}^-$ . Wir können also das folgende Integral wegunabhängig definieren:

$$\int_z^{z+N} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_{C_N} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = e^{-z} \int_0^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt = F_N(z), \quad z \in \mathbb{C}^-,$$

wobei  $C_N : [0, N] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C_N(t) = t + z$ .

- (i) Offenbar ist die durch  $f_N(z, t) = \frac{e^{-t-z}}{t+z}$  definierte Funktion  $f_N : \mathbb{C}^- \times [0, N] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für jedes feste  $t \in [0, N]$  ist die Funktion  $z \mapsto f_N(z, t)$  holomorph, denn die Funktionen  $z \mapsto e^{-t-z}$  und  $z \mapsto t+z$  sind jeweils holomorph in  $\mathbb{C}^-$ , und  $t+z \neq 0$  für alle  $t \in [0, N]$ ,  $z \in \mathbb{C}^-$ . Die anderen Voraussetzungen des Holomorphiesatzes für parameterabhängige Integrale sind offensichtlich erfüllt, also ist  $F_N$  holomorph in  $\mathbb{C}^-$ .
- (ii) Es sei  $z \in \mathbb{C}^-$ . Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Die Funktion  $[\lvert \operatorname{Re}(z) \rvert, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{1}{\lvert t+z \rvert}$ , ist streng monoton fallend. Wähle  $N_0 \in \mathbb{N}$ ,  $N_0 > \lvert \operatorname{Re}(z) \rvert$ , so groß, dass

$$\frac{e^{-N_0}}{\lvert N_0 + z \rvert} < \lvert e^z \rvert \varepsilon.$$

Für  $n, N \in \mathbb{N}$  mit  $N > n \geq N_0$  gilt nun, dass

$$\begin{aligned} \lvert F_N(z) - F_n(z) \rvert &= \left| e^{-z} \int_n^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt \right| \\ &\leq \frac{\lvert e^{-z} \rvert}{\lvert n+z \rvert} \int_n^N e^{-t} dt \\ &\leq \frac{\lvert e^{-z} \rvert}{\lvert n+z \rvert} (e^{-n} - e^{-N}) \\ &\leq \frac{\lvert e^{-z} \rvert}{\lvert N_0 + z \rvert} e^{-N_0} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist  $(F_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$ . Bekanntermaßen ist  $\mathbb{C}$  ein Banachraum, also existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(z)$  in  $\mathbb{C}$ , wie behauptet.

- (iii) Nach Punkt (ii) können wir die Grenzfunktion

$$F : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-z} \int_0^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt,$$

definieren. Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}^-$ . Betrachte die abgeschlossene Kreisscheibe  $K := \overline{K_\rho(z_0)}$  mit Radius  $\rho$  um  $z_0$  als Umgebung von  $z_0$ , wobei  $\rho := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{R}_{\leq 0}) = \frac{1}{2} \inf_{x \in \mathbb{R}_{\leq 0}} \lvert z_0 - x \rvert > 0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wähle  $N_0 \in \mathbb{N}$ ,  $N_0 > \max_{z \in K} \lvert \operatorname{Re}(z) \rvert$ , so groß, dass

$$e^{-N_0} \cdot \max_{z \in K} \frac{1}{\lvert N_0 + z \rvert} < \frac{1}{\max_{z \in K} \lvert e^{-z} \rvert} \varepsilon,$$

wobei das Maximum jeweils angenommen wird, da  $K$  kompakt und  $z \mapsto \lvert e^{-z} \rvert$  sowie  $z \mapsto \lvert N_0 + z \rvert^{-1}$  jeweils stetig auf  $K$  ist. Für  $n, N \in \mathbb{N}$  mit  $N > n \geq N_0$  gilt nun unabhängig von  $z \in K$ , dass

$$\begin{aligned} \lvert F_N(z) - F_n(z) \rvert &= \left| e^{-z} \int_n^N \frac{e^{-t}}{t+z} dt \right| \\ &\leq \max_{z \in K} \lvert e^{-z} \rvert \max_{z \in K} \frac{1}{\lvert n+z \rvert} \int_n^N e^{-t} dt \\ &\leq \max_{z \in K} \lvert e^{-z} \rvert \max_{z \in K} \frac{1}{\lvert n+z \rvert} (e^{-n} - e^{-N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{z \in K} |e^{-z}| \max_{z \in K} \frac{1}{|N_0 + z|} e^{-N_0} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktion

$$\left[ \max_{z \in K} |\operatorname{Re}(z)|, \infty \right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{|t + z|},$$

streng monoton fallend ist. Folglich gilt für alle  $n, N \in \mathbb{N}$  mit  $N > n \geq N_0$ , dass

$$\sup_{z \in K} |F_N(z) - F_n(z)| < \varepsilon.$$

Es sei  $\zeta \in K$ . Nach Punkt (ii) existiert  $m_0 = m_0(\varepsilon, \zeta) \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|F(\zeta) - F_{m_0}(\zeta)| < \varepsilon,$$

wobei wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass  $m_0 \geq N_0$ . Insgesamt erhalten wir unabhängig von  $\zeta \in K$  für alle  $n \geq N_0$ , dass

$$\begin{aligned} |F(\zeta) - F_n(\zeta)| &\leq |F(\zeta) - F_{m_0}(\zeta)| + |F_{m_0}(\zeta) - F_n(\zeta)| \\ &\leq \varepsilon + \sup_{\zeta \in K} |F_{m_0}(\zeta) - F_n(\zeta)| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sup_{\zeta \in K} |F(\zeta) - F_n(\zeta)| < 2\varepsilon$$

für alle  $n \geq N_0$ , also konvergiert die Funktionenfolge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen  $F$ . Offensichtlich ist  $\mathbb{C}^-$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Insgesamt folgt mit dem Satz von Weierstraß, dass die Funktion  $F$  holomorph in  $\mathbb{C}^-$  ist, was zu beweisen war.  $\square$

**4.20 Satz:** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}^-$  derart, dass  $\{\operatorname{Re}(a_1), \operatorname{Re}(a_2), \dots\}$  nach unten beschränkt ist, und dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{a_n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = F(z).$$

für alle  $z \in \mathbb{C}^-$ .

**Beweis:** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wie in der Voraussetzung des Satzes beschriebene Folge. Es sei  $z \in \mathbb{C}^-$  beliebig, aber fest. Im Rahmen einer Fallunterscheidung nehmen wir zunächst zusätzlich an, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \infty$ . Es sei  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $N > |\operatorname{Re}(z)|$  und  $\operatorname{Re}(a_n) > 2|z|$  für alle  $n \geq N$ . Betrachte für jedes  $n \geq N$  die Kurven

$$\begin{aligned} C_{1,n} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, & C_{1,n}(t) &= |a_n| e^{i\{\arg(a_n) + t(\arg(z+x_n) - \arg(a_n))\}}, \\ C_{2,n} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, & C_{2,n}(t) &= z + x_n + t \cdot (n - x_n), \end{aligned}$$

wobei die positiven reellen Zahlen  $x_n = -\operatorname{Re}(z) + \sqrt{-\operatorname{Im}(z)^2 + |a_n|^2}$  so gewählt sind, dass  $z + x_n$  den eindeutig bestimmten Schnittpunkt des Kreises mit Radius  $|a_n|$  um Null und der parallel zur reellen Achse verlaufenden Gerade durch  $z$  in der rechten Halbebene  $\mathbb{H}_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta) > 0\}$  markiert. Mit  $\arg(\zeta)$  bezeichnen wir den Winkel der komplexen Zahl  $\zeta$ . Im Folgenden werden wir zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{2,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta,$$

wobei wir ohne Einschränkung  $n \geq N$  in den Limiten fordern dürfen. Des Weiteren seien die komplexen Zahlen  $a_n$ ,  $z + n$  und  $z + x_n$  ohne Einschränkung paarweise verschieden, denn andernfalls verschwinden die entsprechenden Wegintegrale der in  $\mathbb{C}^-$  holomorphen Funktion  $\zeta \mapsto \frac{e^{-\zeta}}{\zeta}$  trivialerweise. Setze  $\Omega_n := \{C_{1,n}(t) : t \in [0, 1]\}$ . Wir berechnen mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| &\leq 2\pi |a_n| \cdot \max_{\zeta \in \Omega_n} \left| \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} \right| \\ &= 2\pi |a_n| \cdot \frac{\max_{\zeta \in \Omega_n} |e^{-\zeta}|}{|a_n|} \\ &= 2\pi \cdot \max_{\zeta \in \Omega_n} e^{-\operatorname{Re}(\zeta)}. \end{aligned}$$

Da die Zahlen  $z + x_n$  und  $a_n$  für jedes  $n \geq N$  in der rechten Halbebene liegen und  $\Omega_n$  den Kreisbogen zwischen  $z + x_n$  und  $a_n$  beschreibt, wird der Realteil der  $\zeta$  aus  $\Omega_n$  für  $\zeta = z + x_n$  oder für  $\zeta = a_n$  minimal. Daher gilt

$$\left| \int_{C_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| \leq 2\pi e^{-\min\{\operatorname{Re}(a_n), \operatorname{Re}(z+x_n)\}} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ , denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \infty$  nach Voraussetzung und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z + x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{-\operatorname{Im}(z)^2 + |a_n|^2} = \infty$ .

Als Nächstes betrachten wir das Kurvenintegral entlang  $C_{2,n}$ . Es gilt

$$\int_{C_{2,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{e^{-z-x_n-t \cdot (n-x_n)}}{|z+x_n+t \cdot (n-x_n)|} (n-x_n) dt = \int_{x_n}^n \frac{e^{-z-\tau}}{|z+\tau|} d\tau,$$

wobei wir  $\tau := t \cdot (n - x_n) + x_n$  substituiert haben. Nun folgt wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{2,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| &\leq \int_{\min\{x_n, n\}}^{\infty} \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)-\tau}}{|z+\tau|} d\tau \\ &\leq \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)}}{|\operatorname{Re}(z) + \min\{x_n, n\}|} \int_{\min\{x_n, n\}}^{\infty} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)}}{|\operatorname{Re}(z) + \min\{x_n, n\}|} e^{-\min\{x_n, n\}} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ ; man beachte, dass der Ausdruck  $|\operatorname{Re}(z) + \min\{x_n, n\}|^{-1}$  wegen  $n \geq N > |\operatorname{Re}(z)|$  und  $x_n > -\operatorname{Re}(z) + \sqrt{4\operatorname{Re}(z)^2 + 3\operatorname{Im}(z)^2} \geq |\operatorname{Re}(z)|$  wohldefiniert ist und für  $n \rightarrow \infty$  sogar gegen Null strebt. Insgesamt haben wir gezeigt, dass das Integral von  $a_n$  zu  $z + n$ ,  $\int_{a_n}^{z+n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta$ ,

für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ , gegen Null strebt. Daraus folgt wie behauptet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{a_n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = F(z)$ .

Nun betrachten wir den Fall, dass die in den Voraussetzungen des Satzes beschriebene Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\{\operatorname{Re}(a_1), \operatorname{Re}(a_2), \dots\} \text{ ist beschränkt und } \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im}(a_n)| = \infty.$$

Offensichtlich folgen diese Eigenschaften notwendig aus den Forderungen an die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Satz und daraus, dass die Folge der Realteile von  $a_n$  nun auch nach oben beschränkt sein soll. Wie

im ersten Fall sei  $z \in \mathbb{C}^-$  beliebig, aber fest gewählt. Es sei  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $N > |\operatorname{Re}(z)|$  und  $n + \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(a_n)$ ,  $|\operatorname{Im}(a_n)| > 1$  für alle  $n \geq N$ . Betrachte für jedes  $n \geq N$  die Kurven

$$\begin{aligned}\gamma_{1,n} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_{1,n}(t) &= z + n + it \cdot (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(z)), \\ \gamma_{2,n} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C}, & \gamma_{2,n}(t) &= \operatorname{Re}(z) + n + i \cdot \operatorname{Im}(a_n) + t \cdot (\operatorname{Re}(a_n) - n - \operatorname{Re}(z)).\end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{2,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta,$$

wobei wir ohne Einschränkung  $n \geq N$  in den Limiten fordern dürfen. Des Weiteren seien die komplexen Zahlen  $a_n$ ,  $z + n$  und  $\operatorname{Re}(z) + n + i \cdot \operatorname{Im}(a_n)$  ohne Einschränkung paarweise verschieden, denn andernfalls verschwinden die entsprechenden Wegintegrale der in  $\mathbb{C}^-$  holomorphen Funktion  $\zeta \mapsto \frac{e^{-\zeta}}{\zeta}$  trivialerweise. Mit Hilfe der Transformation  $\tau := t \cdot (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(z)) + \operatorname{Im}(z)$  und partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}& \left| \int_{\gamma_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| \\ &= e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left| \int_0^1 \frac{e^{-it \cdot (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(z))}}{[\operatorname{Re}(z) + n] + i [\operatorname{Im}(z) + t \cdot (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(z))]} (\operatorname{Im}(a_n) - \operatorname{Im}(z)) dt \right| \\ &= e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left| e^{i \cdot \operatorname{Im}(z)} \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{e^{-i\tau}}{[\operatorname{Re}(z) + n] + i\tau} d\tau \right| \\ &= e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left| \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{e^{-i\tau}}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} ([\operatorname{Re}(z) + n] - i\tau) d\tau \right| \\ &= e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left| \left[ \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\cos(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \cdot [\operatorname{Re}(z) + n] - \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\sin(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \cdot \tau d\tau \right] \right. \\ &\quad \left. + i \left[ - \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\cos(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \cdot \tau d\tau - \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\sin(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \cdot [\operatorname{Re}(z) + n] \right] \right| \\ &\leq e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left( \left| \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\cos(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \cdot [\operatorname{Re}(z) + n] \right| \right. \\ &\quad + \left| \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\sin(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \cdot \tau d\tau \right| + \left| \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\cos(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \cdot \tau d\tau \right| \\ &\quad \left. + \left| \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \frac{\sin(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \cdot [\operatorname{Re}(z) + n] \right| \right) \\ &\leq e^{-n - \operatorname{Re}(z)} \left( 2 [\operatorname{Re}(z) + n] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \left| \left[ \frac{-\cos(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \tau \right]_{\tau=\operatorname{Im}(z)}^{\tau=\operatorname{Im}(a_n)} + \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \cos(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \right) d\tau \right| \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \left[ \frac{\sin(\tau)}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \tau \right]_{\tau=\operatorname{Im}(z)}^{\tau=\operatorname{Im}(a_n)} - \int_{\operatorname{Im}(z)}^{\operatorname{Im}(a_n)} \sin(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \right) d\tau \right| \\
 \leq & e^{-n-\operatorname{Re}(z)} \left( 2 [\operatorname{Re}(z) + n] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \right. \\
 & + 2 \frac{|\operatorname{Im}(a_n)|}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \operatorname{Im}(a_n)^2} + 2 \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \\
 & \left. + 2 \int_{\min\{\operatorname{Im}(a_n), \operatorname{Im}(z)\}}^{\max\{\operatorname{Im}(a_n), \operatorname{Im}(z)\}} \left| \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \right) \right| d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Mit der Transformation  $s := \frac{\tau}{\operatorname{Re}(z) + n}$  bestimmen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau = \frac{1}{\operatorname{Re}(z) + n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + s^2} ds = \frac{1}{\operatorname{Re}(z) + n} [\arctan(s)]_{s \rightarrow -\infty}^{s \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{\operatorname{Re}(z) + n}.$$

Zudem gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \int_{\min\{\operatorname{Im}(a_n), \operatorname{Im}(z)\}}^{\max\{\operatorname{Im}(a_n), \operatorname{Im}(z)\}} \left| \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\tau}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} \right) \right| d\tau & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 - \tau^2}{([\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2)^2} \right| d\tau \\
 & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2 + \tau^2} d\tau \\
 & = \frac{\pi}{\operatorname{Re}(z) + n}.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\left| \int_{\gamma_{1,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| \leq e^{-n-\operatorname{Re}(z)} \left( 2\pi + \frac{2}{|\operatorname{Im}(a_n)|} + 2 \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{[\operatorname{Re}(z) + n]^2} + \frac{2\pi}{\operatorname{Re}(z) + n} \right) \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ ; man beachte, dass  $n \geq N > |\operatorname{Re}(z)|$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im}(a_n)| = \infty$ ,  $|\operatorname{Im}(a_n)| > 1$  für  $n \geq N$ .

Schließlich betrachten wir das Kurvenintegral entlang  $\gamma_{2,n}$ . Da  $n + \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(a_n)$  für alle  $n \geq N$  gilt, berechnen wir mit Hilfe der Transformation  $\tau := t \cdot (\operatorname{Re}(a_n) - n - \operatorname{Re}(z)) + \operatorname{Re}(z) + n$ , dass

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\gamma_{2,n}} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right| \\
 = & \left| e^{-i \operatorname{Im}(a_n)} \int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Re}(z) - n - t \cdot (\operatorname{Re}(a_n) - n - \operatorname{Re}(z))}}{i \cdot \operatorname{Im}(a_n) + \operatorname{Re}(z) + n + t \cdot (\operatorname{Re}(a_n) - n - \operatorname{Re}(z))} [\operatorname{Re}(a_n) - n - \operatorname{Re}(z)] dt \right| \\
 = & \left| \int_{\operatorname{Re}(z) + n}^{\operatorname{Re}(a_n)} \frac{e^{-\tau}}{i \cdot \operatorname{Im}(a_n) + \tau} d\tau \right| \\
 \leq & \int_{\operatorname{Re}(a_n)}^{\operatorname{Re}(z) + n} \frac{e^{-\tau}}{|\operatorname{Im}(a_n)|} d\tau \\
 \leq & \frac{1}{|\operatorname{Im}(a_n)|} \int_{\operatorname{Re}(a_n)}^{\infty} e^{-\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\operatorname{Im}(a_n)|} e^{-\operatorname{Re}(a_n)} \\ \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ , nach den Voraussetzungen an die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass das Integral von  $a_n$  zu  $z + n$ ,  $\int_{a_n}^{z+n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta$ , für  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \geq N$ , gegen Null strebt. Daraus folgt wie behauptet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{a_n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = F(z)$ , und der Satz ist vollständig bewiesen.  $\square$

**4.21 Definition.** Nach Lemma 4.19 und Satz 4.20 ist die Funktion

$$E_1 : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta,$$

holomorph und im folgenden Sinne wohldefiniert:

Für jedes  $z \in \mathbb{C}^-$  und jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  derart, dass  $\{\operatorname{Re}(a_1), \operatorname{Re}(a_2), \dots\}$  nach unten beschränkt ist, und dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{a_n} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = E_1(z).$$

Die Funktion  $E_1$  heißt *exponentielle Integralfunktion*.

**4.22 Folgerung:** Die exponentielle Integralfunktion besitzt Darstellungen

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z} dt, \quad z \in \mathbb{C}^-,$$

und

$$E_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-tz}}{t} dt, \quad z \in \overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\},$$

wobei  $\mathbb{H}_r = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$  die rechte Halbebene bezeichne.

**Beweis:** Die Darstellung

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z} dt, \quad z \in \mathbb{C}^-,$$

war Ausgangspunkt unserer Überlegungen; hier ist nichts mehr zu zeigen.

Es sei  $z \in \overline{\mathbb{H}_r} \setminus \{0\}$ . Betrachte für  $n \in \mathbb{N}$  die Wege  $C_n : [1, n] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C_n(t) = tz$ . Die Folge  $(nz)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 4.20, weil  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ . Daher gilt

$$E_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{nz} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{e^{-tz}}{t} dt = \int_1^\infty \frac{e^{-tz}}{t} dt.$$

$\square$

Wir definieren das *komplementäre exponentielle Integral* unabhängig vom Integrationsweg durch

$$\operatorname{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C},$$

denn  $\zeta \mapsto (1 - e^{-\zeta})/\zeta$  ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , und  $\mathbb{C}$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

**4.23 Satz:** Die komplementäre exponentielle Integralfunktion ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , und es gilt

$$E_1(z) = \text{Ein}(z) - \log(z) - \gamma, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^-, \quad (4.5)$$

wobei  $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$  den durch  $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$  definierten Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichne und  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n))$  die Euler-Konstante.

Zunächst beweisen wir das folgende

**4.24 Lemma:** Die  $\Psi$ -Funktion ist für  $x > 0$  definiert durch

$$\Psi(x) := \frac{d}{dx} \log(\Gamma(x)),$$

wobei  $\gamma$  die Eulersche Konstante bezeichne. Es gilt

$$\Psi(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \log(t) dt = -\gamma. \quad (4.6)$$

**Beweis:** Nach Satz 1 bei Kairies [7] gilt  $\Psi(1) = -\gamma$ . Bekanntlich ist  $\Gamma(1) = 1$ . Betrachte die offene Kreisscheibe mit Radius  $1/2$  um  $1$ ,  $K_{1/2}(1) \subset \mathbb{C}$ . Für jedes fixierte  $t \in (0, \infty)$  ist

$$z \mapsto t^{z-1} e^{-t} = \frac{1}{t} e^{z \cdot \log(t)} e^{-t}$$

holomorph in  $K_{1/2}(1)$ . Für jedes  $t \in (0, \infty)$  und jedes  $z \in K_{1/2}(1)$  gilt

$$\left| \frac{1}{t} e^{z \cdot \log(t)} e^{-t} \right| = \frac{1}{t} e^{\text{Re}(z) \cdot \log(t)} e^{-t} \leq \frac{1}{t} e^{-t} \left( \sqrt{t} \cdot \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + t^{3/2} \cdot \mathbf{1}_{(1,\infty)}(t) \right)$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathbf{1}_{(0,1]}(t) + \sqrt{t} \cdot \mathbf{1}_{(1,\infty)}(t) \right) dt &= \int_0^1 e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} \sqrt{t} dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{\infty} t e^{-t} dt \\ &\leq \left[ 2\sqrt{t} \right]_0^1 + \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \\ &= 3 < \infty. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.33 gilt nun

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \Big|_{z=1} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (t^{z-1} e^{-t}) dt \Big|_{z=1}.$$

Insbesondere ist

$$\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \Big|_{x=1} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (t^{x-1} e^{-t}) dt \Big|_{x=1} = \int_0^{\infty} e^{-t} \log(t) dt.$$

Damit folgt die Behauptung. □

**Beweis des Satzes 4.23:** Offenbar ist die durch  $f(z, t) = \frac{1-e^{-tz}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{n!} z^n$  definierte Funktion  $f : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist die Funktion  $z \mapsto f(z, t)$  holomorph, denn der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{n!} z^n$  ist wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-t)^n / (n+1)!}{(-t)^{n-1} / n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n+1} = 0$$

gleich Unendlich. Die anderen Voraussetzungen des Holomorphiesatzes für parameterabhängige Integrale sind offensichtlich erfüllt, also ist

$$z \mapsto \text{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_C \frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{1-e^{-tz}}{t} dt$$

holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Dabei ist  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C(t) = tz$ .

Ein Beweis der Formel (4.5) findet sich z. B. bei Jeffreys [5], S. 470-471, und erfolgt durch gliedweises Integrieren der Potenzreihenentwicklung der komplementären exponentiellen Integralfunktion und den Grenzübergang  $Z \rightarrow \infty$  unter den Bedingungen des Satzes 4.20. Dies führt zu

$$E_1(z) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_z^Z \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \lim_{Z \rightarrow \infty} \left\{ \int_z^Z \frac{1}{\zeta} d\zeta - \int_z^Z \frac{1-e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \right\} = C - \log(z) + \text{Ein}(z), \quad z \in \mathbb{C}^-,$$

wobei die Konstante  $C := \lim_{Z \rightarrow \infty} \left\{ \log(Z) - \left( Z - \frac{Z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{Z^3}{3 \cdot 3!} - \dots \right) \right\}$  noch zu bestimmen ist. Mit partieller Integration folgt für jedes  $x > 0$ , dass

$$\int_x^{\infty} e^{-t} \log(t) dt = \left[ -e^{-t} \log(t) \right]_{t=x}^{t \rightarrow \infty} + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-x} \log(x) + E_1(x) = C - (1 - e^{-x}) \log(x) + \text{Ein}(x).$$

Andererseits erhalten wir unter Benutzung von (4.6), dass

$$\int_x^{\infty} e^{-t} \log(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \log(t) dt - \int_0^x e^{-t} \log(t) dt = -\gamma - \int_0^x e^{-t} \log(t) dt, \quad x > 0,$$

also

$$C - (1 - e^{-x}) \log(x) + \text{Ein}(x) = -\gamma - \int_0^x e^{-t} \log(t) dt, \quad x > 0.$$

Für  $x \rightarrow 0+$  ergibt sich  $C = -\gamma$ . □

**4.25 Lemma:** *Es gilt*

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy = \frac{i}{2} e^x \cdot \{E_1(x+ix) - E_1(x-ix)\}, \quad x > 0.$$

$$(ii) \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy = \pi e^{-x} + \frac{i}{2} e^{-x} \cdot \{E_1(-x-ix) - E_1(-x+ix)\}, \quad x > 0.$$

**Beweis:**

(i) Wir berechnen mit Hilfe der Transformationen  $\tilde{y} := x + y$  und  $\hat{y} := \tilde{y}/x$

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy = \frac{e^x}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} \left( e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} \right) \frac{1}{x+y} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^x}{2i} \int_x^\infty \left( e^{-\tilde{y}(1-i)} - e^{-\tilde{y}(1+i)} \right) \frac{1}{\tilde{y}} d\tilde{y} \\
 &= \frac{e^x}{2i} \int_1^\infty \left\{ \frac{e^{-\hat{y}(x-ix)}}{\hat{y}} - \frac{e^{-\hat{y}(x+ix)}}{\hat{y}} \right\} d\hat{y} \\
 &= \frac{i}{2} e^x \cdot \{E_1(x+ix) - E_1(x-ix)\}, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen mit (4.5) und der Transformation  $y \mapsto -y$ , dass

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \frac{e^{-y(x-ix)} - e^{-y(x+ix)}}{y} dy \\
 &= -\int_{-1}^1 \frac{1 - e^{-y(x-ix)}}{y} dy + \int_{-1}^1 \frac{1 - e^{-y(x+ix)}}{y} dy \\
 &= -\int_0^1 \frac{1 - e^{-y(x-ix)}}{y} dy - \int_{-1}^0 \frac{1 - e^{-y(x-ix)}}{y} dy + \int_0^1 \frac{1 - e^{-y(x+ix)}}{y} dy + \int_{-1}^0 \frac{1 - e^{-y(x+ix)}}{y} dy \\
 &= -\text{Ein}(x-ix) + \int_0^1 \frac{1 - e^{-y(-x+ix)}}{y} dy + \text{Ein}(x+ix) - \int_0^1 \frac{1 - e^{-y(-x-ix)}}{y} dy \\
 &= -\text{Ein}(x-ix) + \text{Ein}(-x+ix) + \text{Ein}(x+ix) - \text{Ein}(-x-ix) \\
 &= -E_1(x-ix) + E_1(-x+ix) + E_1(x+ix) - E_1(-x-ix) \\
 &\quad - \log(x-ix) + \log(-x+ix) + \log(x+ix) - \log(-x-ix) \\
 &= -E_1(x-ix) + E_1(-x+ix) + E_1(x+ix) - E_1(-x-ix) + 2\pi i, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Transformationen  $y \mapsto -y$ ,  $\tilde{y} := x+y$  und  $\hat{y} := -\tilde{y}/x$ , dass

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy &= \int_{-\infty}^0 e^y \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\
 &= \frac{e^{-x}}{2i} \int_{-\infty}^0 e^{x+y} \left( e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} \right) \frac{1}{x+y} dy \\
 &= \frac{e^{-x}}{2i} \int_{-\infty}^x \left( e^{-\tilde{y}(-1-i)} - e^{-\tilde{y}(-1+i)} \right) \frac{1}{\tilde{y}} d\tilde{y} \\
 &= \frac{e^{-x}}{2i} \int_{-1}^\infty \left( -e^{-\hat{y}(x+ix)} + e^{-\hat{y}(x-ix)} \right) \frac{1}{\hat{y}} d\hat{y} \\
 &= \frac{e^{-x}}{2i} \left\{ E_1(x-ix) - E_1(x+ix) + \int_{-1}^1 \frac{e^{-\hat{y}(x-ix)} - e^{-\hat{y}(x+ix)}}{\hat{y}} d\hat{y} \right\} \\
 &= \pi e^{-x} + \frac{i}{2} e^{-x} \cdot \{E_1(-x-ix) - E_1(-x+ix)\}, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

□

**4.26 Lemma:** Es seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \geq n$ . Dann gilt

$$(i) \int_0^\infty e^{-y} y^m \cos(y) dy = \frac{m!}{2^{(m+1)/2}} \cos((m+1)\pi/4).$$

$$(ii) \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \sin(y) dy = \frac{m!}{2^{(m+1)/2}} \sin((m+1)\pi/4).$$

(iii) für jedes  $x > 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \left( \pi e^{-x} + \frac{i}{2} e^{-x} \{E_1(-x-ix) - E_1(-x+ix)\} \right) \\ &+ \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^{\beta} \\ &\cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{(-1)^{\alpha}}{x^{\alpha}} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x - (\alpha+1)\pi/4) \\ &=: P_{m,n}^{-}(x). \end{aligned}$$

(iv) für jedes  $x > 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\ &= (-1)^m \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \frac{i}{2} e^x \{E_1(x+ix) - E_1(x-ix)\} \\ &+ (-1)^m \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^{\beta} \\ &\cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{1}{x^{\alpha}} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x + (\alpha+1)\pi/4) \\ &=: P_{m,n}^{+}(x). \end{aligned}$$

**Beweis:**

(i) Dies wurde bereits im Beweis von (i) des Lemmas 4.15 gezeigt.

(ii) folgt völlig analog zu (i).

(iii) Wie wir bereits gezeigt haben, ist die Funktion  $z \mapsto \sin(z)/z$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ , und  $x \mapsto \sin(x)/x$  sowie sämtliche Ableitungen beliebiger Ordnung sind jeweils in  $L^{\infty}(\mathbb{R})$ . Daher treten in der folgenden  $n$ -fachen partiellen Integration keine Randterme auf, und zusammen mit der Leibniz-Formel und dem binomischen Lehrsatz folgt, dass

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \{e^{-y} y^m\} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} \int_0^\infty e^{-y} (\{y-x\} + x)^{m-n+\nu} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} \sum_{\beta=0}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} x^{m-n+\nu-\beta} \int_0^\infty e^{-y} (y-x)^\beta \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^\beta \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{x^\alpha} \\
&\quad \cdot \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha \{\sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x)\} dy, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Durch Anwenden von (i) und (ii) dieses Lemmas, des Additionstheorems für den Sinus sowie von (ii) aus Lemma 4.25 ergibt sich unmittelbar die behauptete Formel.

(iv) Völlig analog zum Beweis von (iii) folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\
&= \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} (-1)^{m+\nu} x^{m-n+\nu} \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^{m+\nu+\beta} \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \\
&\quad \cdot \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha \{\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)\} dy, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Durch Anwenden von (i) und (ii) dieses Lemmas, des Additionstheorems für den Sinus sowie von (i) aus Lemma 4.25 ergibt sich unmittelbar die behauptete Formel.  $\square$

**4.27 Lemma:** *Es seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x > 0$ . Dann gilt*

$$(i) \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy = (-1)^n \sum_{b=0}^{n-1} (-1)^b \frac{d^{n-1-b}}{dx^{n-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} + \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy.$$

$$(ii) \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy = - \sum_{b=0}^{n-1} \frac{d^{n-1-b}}{dx^{n-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} + \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy.$$

(iii) *im Fall  $m < n$ , dass*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\
&= m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} (-1)^a \sum_{b=0}^{n-m-a-1} (-1)^b \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} \\
&\quad + \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \left( \pi e^{-x} + \frac{i}{2} e^{-x} \{E_1(-x-ix) - E_1(-x+ix)\} \right) \\
&\quad + \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{x^\alpha} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x - (\alpha+1)\pi/4) \\ & =: Q_{m,n}^-(x). \end{aligned}$$

(iv) im Fall  $m < n$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\ & = (-1)^{m+1} m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} \sum_{b=0}^{n-m-a-1} \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} \\ & \quad + (-1)^m \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \frac{i}{2} e^x \{E_1(x+ix) - E_1(x-ix)\} \\ & \quad + (-1)^m \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^\beta \\ & \quad \cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x + (\alpha+1)\pi/4) \\ & =: Q_{m,n}^+(x). \end{aligned}$$

**Beweis:**

- (i) Dies zeigt man mühelos mit vollständiger Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ ; im Induktionsschritt wird einmal partiell integriert.
- (ii) Dies zeigt man ebenfalls mühelos mit vollständiger Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ ; im Induktionsschritt wird einmal partiell integriert.
- (iii) Wir gehen analog zum Beweis von (iii) des Lemmas 4.26 vor und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ & = (-1)^n \int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ & = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial y^n} \{e^{-y} y^m\} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy + \text{Randterme} \\ & = \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} \int_0^\infty e^{-y} (\{y-x\} + x)^{m-n+\nu} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy + \text{Randterme} \\ & = \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} \sum_{\beta=0}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} x^{m-n+\nu-\beta} \int_0^\infty e^{-y} (y-x)^\beta \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ & \quad + \text{Randterme} \\ & = \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ & \quad + \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^\beta \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{x^\alpha} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} \{\sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x)\} dy + \text{Randterme}, \quad x > 0.$$

Durch Anwenden von (i) und (ii) des Lemmas 4.26, des Additionstheorems für den Sinus sowie von (ii) aus Lemma 4.25 ergibt sich unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\ &= \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu} \left( \pi e^{-x} + \frac{i}{2} e^{-x} \{E_1(-x-ix) - E_1(-x+ix)\} \right) \\ &+ \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^{\beta} \\ &\cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{(-1)^{\alpha}}{x^{\alpha}} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x - (\alpha+1)\pi/4) + \text{Randterme}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Aus den schon mehrfach verwendeten Eigenschaften der Funktion  $x \mapsto \sin(x)/x$ , nämlich der Existenz aller Ableitungen beliebiger Ordnung, die wie  $x \mapsto \sin(x)/x$  jeweils in  $L^{\infty}(\mathbb{R})$  sind, und der Leibniz-Regel folgt, dass die ersten  $m$ -mal keine Randterme in der obigen partiellen Integration auftreten. Zudem ist

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy = \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy + \text{Randterm}$$

sowie

$$\frac{d^{m+j}}{dy^{m+j}} \{e^{-y} y^m\} = \sum_{a=j}^{m+j} \binom{m+j}{a} (-1)^a e^{-y} \frac{m!}{(a-j)!} y^{a-j} = m! (-1)^j \binom{m+j}{m} e^{-y} + \text{Rest}$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Zur Bestimmung der in (\*) gesuchten Randterme bilden wir sukzessive die „Abspaltterme“  $(-1)^{m+n} \Phi_0, (-1)^{m+n} \Phi_1, \dots, (-1)^{m+n} \Phi_{n-m-1}$ , für  $x > 0$  durch

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &:= m! \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^{n-m}}{\partial y^{n-m}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy, \\ \Phi_1(x) &:= m! \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^{n-m}}{\partial y^{n-m}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy + m! \left\{ \binom{m+1}{m} - 1 \right\} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial y^{n-m-1}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy, \end{aligned}$$

.....

$$\Phi_{n-m-1}(x) := m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \left\{ \binom{m+a}{m} - \binom{m+a-1}{m} \right\} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\partial^{n-m-a}}{\partial y^{n-m-a}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy.$$

Dies sind die einzigen Terme, in denen bei der weiteren partiellen Integration Randterme auftreten. Zusammen mit (i) dieses Lemmas und  $\binom{m+a}{m} - \binom{m+a-1}{m} = \binom{m+a-1}{m-1}$  erhalten wir die in (\*) gesuchten Randterme zu

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+m} m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} (-1)^{n-m-a} \sum_{b=0}^{n-m-a-1} (-1)^b \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} \\ &= m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} (-1)^a \sum_{b=0}^{n-m-a-1} (-1)^b \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Formel.

(iv) Wir gehen völlig analog zum Beweis von (iii) vor und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-y} y^m \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \\ &= \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} (-1)^{m+\nu} x^{m-n+\nu} \frac{i}{2} e^x \{E_1(x+ix) - E_1(x-ix)\} \\ &+ \sum_{\nu=n-m}^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{m!}{(m-n+\nu)!} x^{m-n+\nu-1} \sum_{\beta=1}^{m-n+\nu} \binom{m-n+\nu}{\beta} (-1)^{m+\nu+\beta} \\ &\cdot \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\alpha!}{2^{(\alpha+1)/2}} \sin(x + (\alpha+1)\pi/4) + \text{Randterme}, \quad x > 0. \quad (**) \end{aligned}$$

Erneut treten in den ersten  $m$  Anwendungen der partiellen Integration keine Randterme auf, und wir bilden sukzessive die „Abspaltterme“  $(-1)^m \Psi_0, (-1)^m \Psi_1, \dots, (-1)^m \Psi_{n-m-1}$ , durch

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &:= m! \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^{n-m}}{\partial y^{n-m}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy, \\ \Psi_1(x) &:= m! \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^{n-m}}{\partial y^{n-m}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy + m! \left\{ \binom{m+1}{m} - 1 \right\} \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial y^{n-m-1}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy, \end{aligned}$$

$$\Psi_{n-m-1}(x) := m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \left\{ \binom{m+a}{m} - \binom{m+a-1}{m} \right\} \int_0^\infty e^{-y} \frac{\partial^{n-m-a}}{\partial y^{n-m-a}} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy,$$

wobei  $x > 0$ . Dies sind die einzigen Terme, in denen bei der weiteren partiellen Integration Randterme auftreten. Zusammen mit (ii) dieses Lemmas und  $\binom{m+a}{m} - \binom{m+a-1}{m} = \binom{m+a-1}{m-1}$  erhalten wir die in (\*\*) gesuchten Randterme zu

$$\begin{aligned} & (-1)^m m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} \left\{ - \sum_{b=0}^{n-m-a-1} \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x} \right\} \\ &= (-1)^{m+1} m! \sum_{a=0}^{n-m-1} \binom{m+a-1}{m-1} \sum_{b=0}^{n-m-a-1} \frac{d^{n-m-a-1-b}}{dx^{n-m-a-1-b}} \frac{\sin(x)}{x}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Formel.  $\square$

Wir schließen dieses Kapitel mit einer expliziten Darstellung der Funktionen  $k^{(\ell)}$  auf  $(0, \infty)$  für  $\ell \in \mathbb{N}$ .

**4.28 Satz:** *Es sei  $\ell \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} k^{(\ell)}(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{2\ell-2}} \left\{ \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{2^m}{m!} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} [P_{m,n}^-(x) + P_{m,n}^+(x)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=m+1}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{2^m}{m!} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} [Q_{m,n}^-(x) + Q_{m,n}^+(x)] \right\}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Dabei sind  $P_{m,n}^\pm(\cdot)$  bzw.  $Q_{m,n}^\pm(\cdot)$  die Funktionen aus Lemma 4.26 bzw. Lemma 4.27.

**Beweis:** Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Satzes folgt mit Hilfe des Indexshifts  $m := \ell - j - 1$ , dass

$$k^{(\ell)}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} |y|^{\ell-j-1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{1}{2^j} \binom{\ell+j-1}{\ell-1} \frac{1}{(\ell-j-1)!} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\ell-j-1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\ell-j-1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{\ell-1}} \sum_{n=0}^{2\ell} \sum_{m=0}^{\ell-1} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{1}{2^{\ell-m-1}} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} \frac{1}{m!} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{2\ell-2}} \left\{ \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^m + \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=m+1}^{2\ell} \right\} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{2^m}{m!} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} \\
&\quad \cdot \left\{ \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x-y)}{x-y} dy + \int_0^{\infty} e^{-y} y^m \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\sin(x+y)}{x+y} dy \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^{2\ell-2}} \left\{ \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{2^m}{m!} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} [P_{m,n}^-(x) + P_{m,n}^+(x)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{n=m+1}^{2\ell} (-1)^n \binom{2\ell}{n} \frac{2^m}{m!} \binom{2\ell-m-2}{\ell-1} [Q_{m,n}^-(x) + Q_{m,n}^+(x)] \right\}, \quad x > 0,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

# Anhang

## 1 Eine Orthonormalbasis von $L^2(0, \infty)$

Die Laguerresche Differentialgleichung lautet

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Definiere das  $n$ -te Laguerre-Polynom  $\mathfrak{L}_n$  für  $x > 0$  durch  $\mathfrak{L}_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ . Mit der Leibnizformel sehen wir, dass

$$\mathfrak{L}_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j, \quad x > 0,$$

d. h.  $\mathfrak{L}_n$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  mit Leitterm  $\frac{(-1)^n}{n!} x^n$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} n\mathfrak{L}_n(x) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n + \sum_{j=1}^{n-1} n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j + n, \\ \mathfrak{L}'_n(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} x^j - n, \\ -x\mathfrak{L}'_n(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{(j-1)!} x^j, \\ x\mathfrak{L}''_n(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^{j+1}}{(j-1)!} x^j, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} x\mathfrak{L}''_n(x) + (1-x)\mathfrak{L}'_n(x) + n\mathfrak{L}_n(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j x^j \left[ \binom{n}{j+1} \frac{-1}{(j-1)!} + \binom{n}{j+1} \frac{-1}{j!} + \binom{n}{j} \frac{-1}{(j-1)!} + \binom{n}{j} \frac{n}{j!} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j x^j \left[ -\frac{n-j}{j+1} \frac{j}{j!} - \frac{n-j}{j+1} \frac{1}{j!} - \frac{j}{j!} + \frac{n}{j!} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{n-j}{j!} x^j \left[ -\frac{j}{j+1} - \frac{1}{j+1} + 1 \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Demnach erfüllt das  $n$ -te Laguerre-Polynom die Laguerresche Differentialgleichung zu  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**A.1 Lemma:** Die Funktionen  $e^{-x/2} \mathfrak{L}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , bilden ein Orthonormalsystem von  $L^2(0, \infty)$ .

**Beweis:** Offenbar gilt

$$\int_0^\infty e^{-x} [\mathfrak{L}_0(x)]^2 dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

und

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \mathfrak{L}_n(x) \mathfrak{L}_0(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = \left[ \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Es seien nun  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq m$ . Für jedes  $j \in \{n-m, n-m+1, \dots, n\}$  konvergiert

$$\frac{x^{m-n+j}}{n!} \frac{d^j}{dx^j} (x^n e^{-x}) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{(-1)^i}{(n-j+i)!} x^{m+i} e^{-x}$$

gegen Null, falls  $x \rightarrow 0$  oder  $x \rightarrow \infty$ . Daher verschwinden in der folgenden  $m$ -maligen partiellen Integration sämtliche Randterme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m \mathfrak{L}_n(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^m}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx \\ &= \frac{(-1)^m m!}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx \\ &= (1 - \delta_{mn}) \cdot \frac{(-1)^m m!}{n!} \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^n e^{-x}) \right]_{x=0}^{x \rightarrow \infty} + \delta_{mn} \cdot (-1)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= (1 - \delta_{mn}) \cdot 0 + \delta_{mn} \cdot (-1)^n n! \\ &= \delta_{mn} \cdot (-1)^n n!. \end{aligned}$$

Da  $\mathfrak{L}_m$  ein Polynom vom Grad  $m$  mit Leitterm  $\frac{(-1)^m}{m!} x^m$  ist, folgt, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \mathfrak{L}_m(x) \mathfrak{L}_n(x) dx = (1 - \delta_{mn}) \cdot 0 + \delta_{mn} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \mathfrak{L}_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

Falls  $m > n$ , so vertauschen wir die Rollen von  $m$  und  $n$  in der vorigen Zeile. □

Um die Vollständigkeit unseres Orthonormalsystems zu beweisen, verwenden wir

**A.2 Satz:** *Es sei  $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ , ein Intervall und  $f$  eine fast überall von Null verschiedene, integrierbare Funktion auf  $\mathfrak{J}$ , die für alle  $x \in \mathfrak{J}$  eine Abschätzung  $|f(x)| \leq C e^{-\delta|x|}$  mit Konstanten  $C, \delta > 0$  erfüllt. Dann ist die Folge der Funktionen*

$$x^n f, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

vollständig in  $L^2(\mathfrak{J})$ .

**Beweis:** Satz A.2 stammt aus Königsberger [10], S. 342. Der Beweis wird auf den Seiten 341 und 342 geführt. Die Beweisidee ist die folgende: Es sei  $g \in L^2(\mathfrak{J})$  beliebig mit

$$\langle x^n f, g \rangle = \int_{\mathfrak{J}} x^n f(x) \bar{g}(x) dx = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

Auf Grund der punktweisen Abschätzung für die Funktion  $f$  existiert eine Funktion  $F$ , die in einem Streifen  $S \subset \mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R} \subset S$  holomorph ist, so dass  $F(x) = \widehat{f_{\mathfrak{J}} g_{\mathfrak{J}}}(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dabei bezeichne  $f_{\mathfrak{J}}$  bzw.  $g_{\mathfrak{J}}$  die triviale Fortsetzung von  $f$  bzw.  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Aus (\*) folgt, dass  $F^{(n)}(0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  verschwindet; der Identitätssatz für holomorphe Funktionen und der Umkehrsatz der Fourier-Transformation implizieren nun, dass  $g_{\mathfrak{J}} = 0$  fast überall. □

**A.3 Satz:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die Funktion  $\phi_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\phi_n(x) := e^{-x/2} \mathfrak{L}_n(x)$ . Dann ist  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(0, \infty)$ .

**Beweis:** Nach Lemma A.1 ist die Folge  $\phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , ein Orthonormalsystem in  $L^2(0, \infty)$ . Um die Vollständigkeit zu zeigen, betrachten wir das Intervall  $\mathfrak{J} = (0, \infty)$ . Die durch  $f(x) := e^{-x/2}$  definierte Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die gewünschte Abschätzung aus Satz A.2 mit  $C = 1$  und  $\delta = 1/2$ , also bilden die Funktionen  $x^n f$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , ein vollständiges Erzeugendensystem von  $L^2(0, \infty)$ . Da  $\mathfrak{L}_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  ein Polynom  $n$ -ten Grades ist, folgt, dass auch  $\phi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , ein vollständiges Erzeugendensystem von  $L^2(0, \infty)$  ist.  $\square$

## 2 Harmonische Analysis

Wir betrachten den Hilbertraum  $\ell^2$  der Folgen  $x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots)$  mit  $x_j \in \mathbb{C}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$  und  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$  zusammen mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2} : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \overline{y_j}$ . Den Hilbertraum  $\ell_+^2$  aller Folgen  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  mit  $x_j \in \mathbb{C}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum_{j \in \mathbb{N}_0} |x_j|^2 < \infty$  zusammen mit der Einschränkung des  $\ell^2$ -Skalarproduktes auf  $\ell_+^2$  fassen wir auf natürliche Weise als abgeschlossenen Teilraum von  $\ell^2$  auf, nämlich als Bild der orthogonalen Projektion  $(\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots) \mapsto (\dots, 0, \dots, 0, x_0, \dots, x_n, \dots)$ . Es ist allgemein bekannt, dass durch  $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  bzw.  $(e_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine Orthonormalbasis von  $\ell^2$  bzw.  $\ell_+^2$  gegeben ist, wobei die Folge  $e_j$  an der  $j$ -ten Stelle eine Eins und sonst ausschließlich Nullen enthält, für alle  $j \in \mathbb{Z}$ .

Wir betrachten den Hilbertraum  $L^2(\mathbb{S}^1)$  zusammen mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : L^2(\mathbb{S}^1) \times L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$ , und der Norm  $\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \langle f, f \rangle_{L^2}^{1/2}$ . Es sei  $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ . Für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ist der  $n$ -te Fourier-Koeffizient von  $f$  definiert durch

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

Dass  $\hat{f}(n)$  existiert, zeigt man mühelos mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

**A.4 Satz:** Die Abbildung  $f \mapsto \hat{f}$  ist ein isometrischer Isomorphismus  $L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow \ell^2$ . Durch  $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{S}^1)$  gegeben.<sup>8</sup>

**Beweis:** Für ganze Zahlen  $m$  und  $n$  gilt

$$\langle e^{imt}, e^{int} \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \delta_{mn},$$

also ist  $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Orthonormalsystem in  $L^2(\mathbb{S}^1)$ . Für den Beweis der Vollständigkeit sei auf Werner [25], Beispiel (b) und (c), S. 234-235, verwiesen.

Die Abbildung  $f \mapsto \hat{f}$  ist offensichtlich linear, und falls  $\hat{f}(m) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$ , so ist  $f$  orthogonal zur linearen Hülle der Orthonormalbasis  $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ , also  $f = 0$ . Es sei  $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imt}$  aus  $L^2(\mathbb{S}^1)$  mit komplexen Zahlen  $a_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m \overline{a_n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|^2,$$

<sup>8</sup>Wir schreiben  $e^{int}$  für die durch  $z \mapsto z^n = e^{int}$  definierte Abbildung aus  $L^2(\mathbb{S}^1)$ .

und da  $a_m = \hat{f}(m)$  für jedes  $m \in \mathbb{Z}$ , ist der Satz vollständig bewiesen.  $\square$

Der Hardy-Raum  $H^2(\mathbb{D})$  ist definiert durch

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist analytisch, } N_2(f) < \infty\},$$

wobei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  und  $N_2(f) = \sup_{0 \leq r < 1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta}$ .

**A.5 Satz:**  $H^2(\mathbb{D})$  ist ein Hilbertraum mit Norm  $N_2$  und Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^2(\mathbb{D})} : H^2(\mathbb{D}) \times H^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta$ . Die durch  $h(f) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  definierte Abbildung  $h : H^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell_+^2$ , wobei  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n z^n$ , ist ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen. Zudem ist durch  $1, z, z^2, z^3, \dots$  eine Orthonormalbasis von  $H^2(\mathbb{D})$  gegeben.<sup>9</sup>

**Beweis:** Dies sind Punkt ii) bis vi) aus Aufgabe 13 bei Costara und Popa [2], S. 248; eine vollständige Lösung findet sich auf S. 259-263. Die Darstellung des Skalarproduktes wird bei [2] als Remark bewiesen, s. S. 263.  $\square$

**A.6 Satz:** Es sei  $f \in H^2(\mathbb{D})$ . Dann existiert der radiale Limes  $\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1, r < 1} f(re^{i\theta})$  fast überall für  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Es gilt  $\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ , insbesondere ist  $\tilde{f}$  in  $L^2(\mathbb{S}^1)$ .

**Beweis:** Ein Beweis findet sich bei Katznelson [6], Theorem 3.8, S. 86.  $\square$

Die Menge aller Funktionen  $\tilde{f}$  aus Satz A.6 heißt *Hardy-Raum auf dem Kreis* und wird mit  $H^2$  bezeichnet. Wir schreiben  $f(e^{i\theta})$  anstelle von  $\tilde{f}(e^{i\theta})$ .

**A.7 Satz:**  $H^2$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $L^2(\mathbb{S}^1)$ . Eine Funktion  $f$  gehört genau dann zu  $H^2$ , wenn  $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$  und  $\hat{f}(n) = 0$  für alle  $n = -1, -2, -3, \dots$  gilt.

**Beweis:** Eine Funktion  $f$  gehört nach Katznelson [6], Theorem 3.12, S. 88, genau dann zu  $H^2$ , wenn  $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$  und  $\hat{f}(n) = 0$  für alle  $n = -1, -2, -3, \dots$  gilt. Nun folgt sofort, dass  $H^2$  als Urbild der abgeschlossenen Teilmenge  $\ell_+^2$  von  $\ell^2$  unter dem isometrischen Isomorphismus  $f \mapsto \hat{f}$  abgeschlossen ist.  $\square$

### 3 Über die Multiplizität für das stetige Spektrum eines selbstadjungierten Operators

Es sei  $H$  ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  und Norm  $\|\cdot\| : H \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Es seien  $T : H \supset \text{dom}(T) \rightarrow H$  ein dicht definierter selbstadjungierter Operator und  $E$  das eindeutig bestimmte Spektralmaß, das  $T$  darstellt. Dann folgt bereits, dass das Residualspektrum von  $T$  leer und das Spektrum von  $T$  reell ist. Wie kann man jedem Wert  $\lambda \in \sigma(T)$  eine „Vielfachheit“ zuordnen? Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$ , so definiert man wie in der linearen Algebra die Vielfachheit (Multiplizität) von  $\lambda$  als die Vektorraumdimension des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda$ . Für den Fall, dass  $\lambda$  zum kontinuierlichen Spektrum von  $T$  gehört, kann  $\lambda$  ebenfalls eine Multiplizität zugeordnet werden. Wir folgen der Vorgehensweise bei Stone [22].

In diesem Abschnitt haben  $H$ ,  $T$  und  $E$  stets die oben festgelegte Bedeutung.

<sup>9</sup>Genau genommen bilden  $z \mapsto z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , diese Orthonormalbasis.

**A.8 Definition:** Es seien  $S : H \supset \text{dom}(S) \rightarrow H$  ein abgeschlossener dicht definierter Operator,  $\mathfrak{M}$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H$  und  $P$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathfrak{M}$ . Falls für jedes  $f \in \text{dom}(S)$  gilt, dass  $P(f) \in \text{dom}(S)$  und  $(SP)(f) = (PS)(f)$ , so sagen wir, dass  $\mathfrak{M}$  den Operator  $S$  reduziert. Falls dies nur auf die Teilräume  $\{0\}$  und  $H$  zutrifft, so heißt  $S$  irreduzibel; ansonsten heißt  $S$  reduzibel.

**A.9 Satz:** Es sei  $\mathfrak{E}$  die Menge aller Eigenvektoren von  $T$ . Es sei  $\mathfrak{M}$  der durch  $\mathfrak{E} \cup \{0\}$  definierte abgeschlossene Teilraum von  $H$  mit Dimension  $m$ . Das orthogonale Komplement von  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{N}$  und die Dimension von  $\mathfrak{N}$  mit  $n$ . Dann tritt einer der folgenden drei Fälle ein:

- (i)  $\mathfrak{E}$  ist leer,  $\mathfrak{M} = \{0\}$ ,  $m = 0$ ,  $\mathfrak{N} = H$  und  $n = \infty$ .
- (ii)  $\mathfrak{E}$  enthält ein unvollständiges Orthonormalsystem  $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$  derart, dass der Abschluss der linearen Hülle von  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  bzw.  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  mit  $\mathfrak{M}$  übereinstimmt.<sup>10</sup>  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  sind echte Teilmengen von  $H$ . Es gilt  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und  $n = \infty$ .
- (iii)  $\mathfrak{E}$  enthält eine Orthonormalbasis  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  von  $H$ . Es gilt  $\mathfrak{M} = H$ ,  $m = \infty$ ,  $\mathfrak{N} = \{0\}$ ,  $n = 0$ .

In jedem der drei Fälle wird  $T$  durch  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  reduziert. Zudem gilt:

$f \in H$  ist genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert  $l$  von  $T$ , wenn

$$\|E_{(-\infty, \lambda]} f\|^2 = 0, \quad \lambda < l; \quad \|E_{(-\infty, \lambda]} f\|^2 = \|f\|^2 \neq 0, \quad \lambda \geq l.$$

Falls (ii) oder (iii) eingetreten ist, so ist  $f \neq 0$  genau dann ein Element in  $\mathfrak{M}$ , wenn

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j, \quad a_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad \|f\|^2 = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 \neq 0;$$

für ein solches  $f$  gilt

$$\|E_{(-\infty, \lambda]} f\|^2 = \sum |a_j|^2, \quad T\varphi_k = l_k \varphi_k,$$

wobei die Summe über alle  $j \in \{1, \dots, m\}$  bzw.  $j \in \mathbb{N}$  verläuft, so dass  $l_j \leq \lambda$ .

$f \neq 0$  ist genau dann ein Element in  $\mathfrak{N}$ , wenn  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} f\|^2$  eine stetige Funktion ist, die nicht identisch Null ist.

Sei  $f \in H$  beliebig, und seien  $g$  bzw.  $h$  die orthogonale Projektion von  $f$  auf  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{N}$ . Dann gilt

$$\|E_{(-\infty, \lambda]} f\|^2 = \|E_{(-\infty, \lambda]} g\|^2 + \|E_{(-\infty, \lambda]} h\|^2.$$

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Stone [22], Theorem 5.13, S. 189-193. □

**A.10 Definition:** Es sei  $f \in H$ . Wir definieren

$$\mathfrak{M}(f) := \{F(T)f : F \in L^2(\mathbb{R}; d\langle E_\lambda f, f \rangle)\},$$

wobei  $d\langle E_\lambda f, f \rangle$  für Integration bzgl. des Maßes  $\Omega \mapsto \langle E_\Omega f, f \rangle$  steht. Für die Bedeutung von  $F(T)$  s. Satz 1.17.

$\mathfrak{M}(f)$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $H$ .<sup>11</sup>

Wir benötigen zwei weitere Sätze, bevor die Multiplizität für jeden Punkt des kontinuierlichen Spektrums definiert werden kann.

<sup>10</sup>Wir verwenden die Schreibweise  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , falls  $m \in \mathbb{N}$ , und  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , falls  $m = \infty$ .

<sup>11</sup>S. Stone [22], Theorem 6.2, S. 226.

**A.11 Satz:** Es seien  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  die beiden in Satz A.9 beschriebenen abgeschlossenen Teilräume von  $H$ . Falls  $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ , so bezeichne  $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$  das Orthonormalsystem aus Satz A.9. Dann tritt einer der folgenden drei Fälle ein:

- (i) Falls  $\mathfrak{M} = \{0\}$ ,  $\mathfrak{N} = H$ , so existiert ein Orthonormalsystem  $\{g_k\}_{k=1}^N$  in  $\mathfrak{N}$  derart, dass die abgeschlossenen Teilräume  $\mathfrak{M}(g_1), \dots, \mathfrak{M}(g_N)$  bzw.  $\mathfrak{M}(g_1), \mathfrak{M}(g_2), \dots$  von  $\mathfrak{N}$  paarweise orthogonal sind, und dass

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_{k=1}^N \mathfrak{M}(g_k).$$

Dabei ist  $N \in \mathbb{N}$  oder  $N = \infty$ .

- (ii) Falls  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  echte Teilmengen von  $H$  sind, so existiert ein Orthonormalsystem  $\{g_k\}_{k=1}^N$  in  $\mathfrak{N}$ . Die abgeschlossenen Teilräume  $\mathfrak{M}(\varphi_1), \dots, \mathfrak{M}(\varphi_m)$  bzw.  $\mathfrak{M}(\varphi_1), \mathfrak{M}(\varphi_2), \dots$  von  $\mathfrak{M}$  sind paarweise orthogonal und bestimmen  $\mathfrak{M}$  via

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{j=1}^m \mathfrak{M}(\varphi_j).$$

Die abgeschlossenen Teilräume  $\mathfrak{M}(g_1), \dots, \mathfrak{M}(g_N)$  bzw.  $\mathfrak{M}(g_1), \mathfrak{M}(g_2), \dots$  von  $\mathfrak{N}$  sind paarweise orthogonal und bestimmen  $\mathfrak{N}$  via

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_{k=1}^N \mathfrak{M}(g_k).$$

Es gilt  $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ . Sind  $j \in \{1, \dots, m\}$  bzw.  $j \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{1, \dots, N\}$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ , so sind  $\mathfrak{M}(\varphi_j)$  und  $\mathfrak{M}(g_k)$  orthogonal zueinander. Dabei sind  $N \in \mathbb{N}$  oder  $N = \infty$  sowie  $m \in \mathbb{N}$  oder  $m = \infty$ .

- (iii) Falls  $\mathfrak{M} = H$ ,  $\mathfrak{N} = \{0\}$ , so sind die abgeschlossenen Teilräume  $\mathfrak{M}(\varphi_1), \mathfrak{M}(\varphi_2), \dots$  paarweise orthogonal und bestimmen  $\mathfrak{M}$  durch

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\varphi_1) \oplus \mathfrak{M}(\varphi_2) \oplus \mathfrak{M}(\varphi_3) \oplus \dots$$

In den Fällen (i) und (ii) sind die Funktionen  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} g_k\|^2$  stetig,  $k = 1, \dots, N$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes sei auf Stone [22], Theorem 7.4, S. 247-250, verwiesen.  $\square$

**A.12 Definition:** Es seien  $f_1, f_2 \in \text{dom}(T)$ . Betrachte die Maße  $\varrho_j : \Omega \mapsto \varrho_j(\Omega) := \|E_\Omega f_j\|^2$ ,  $j = 1, 2$ , auf der Borelschen Sigma-Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  von  $\mathbb{R}$ . Falls für jedes  $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $\varrho_1(\Omega) = 0$  auch  $\varrho_2(\Omega) = 0$  gilt, so schreiben wir  $\varrho_1 \gg \varrho_2$ . In der vorliegenden Situation werden die Maße  $\varrho_j$  durch  $f_j$  bestimmt,  $j = 1, 2$ . Daher verwenden wir die Schreibweise  $f_1 \succ f_2$ , falls  $\varrho_1 \gg \varrho_2$ .

**A.13 Satz:** Wenn Fall (i) oder (ii) aus Satz A.11 eintritt, können wir die  $\{g_k\}_{k=1}^N$  aus Satz A.11 durch ein Orthonormalsystem  $\{\psi_k\}_{k=1}^N$  ersetzen, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i)  $\mathfrak{N} = \bigoplus_{k=1}^N \mathfrak{M}(\psi_k)$ .

- (ii)  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} \psi_k\|^2$  ist eine stetige Funktion,  $k \in \{1, \dots, N\}$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ .

- (iii) Falls  $N \geq 2$ , so gilt  $\psi_k \succ \psi_{k+1}$  für jedes  $k \in \{1, \dots, N-1\}$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei Stone [22], Theorem 7.5, S. 250-258.  $\square$

Für die folgende Definition haben  $T$ ,  $E$ ,  $\{\varphi_k\}$  und  $\{\psi_k\}$  die in diesem Abschnitt übliche Bedeutung.

**A.14 Definition:** Der Punkt  $\lambda = \mu$  hat Multiplizität null bzgl. des kontinuierlichen Spektrums des selbstadjungierten Operators  $T$ , falls der abgeschlossene Teilraum  $\mathfrak{N}$  von  $H$  aus Satz A.9 trivial ist, d. h.  $\mathfrak{N} = \{0\}$ , oder falls  $\mathfrak{N} \neq \{0\}$  ist und ein Intervall existiert, auf dem die Funktion  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} \psi_1\|^2$  konstant ist, und so dass  $\mu$  ein innerer Punkt dieses Intervalls ist.

Der Punkt  $\lambda = \mu$  hat Multiplizität  $n \in \mathbb{N}$  bzgl. des kontinuierlichen Spektrums des selbstadjungierten Operators  $T$ , falls die Funktion  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} \psi_k\|^2$  für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  existiert und auf keinem Intervall konstant ist, das  $\mu$  als inneren Punkt enthält, und die Menge  $\{\psi_k\}$  aus  $n$  Elementen besteht, oder falls die Funktion  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} \psi_{n+1}\|^2$  existiert und auf einem Intervall konstant ist, das  $\mu$  als inneren Punkt enthält.

Der Punkt  $\lambda = \mu$  hat Multiplizität unendlich bzgl. des kontinuierlichen Spektrums des selbstadjungierten Operators  $T$ , falls die Menge  $\{\psi_k\}$  abzählbar unendlich viele Elemente enthält, und keine der Funktionen  $\lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]} \psi_k\|^2$  auf einem Intervall konstant ist, das  $\mu$  als inneren Punkt enthält, für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

**A.15 Bemerkung:** Falls  $\mathcal{U} : H \rightarrow \tilde{H}$  eine unitäre Abbildung ist, so kann man nachrechnen, dass die eben definierte Multiplizität invariant gegenüber  $\mathcal{U}$  ist im folgenden Sinn: Die Multiplizität der selbstadjungierten Operatoren  $T$  und  $\mathcal{U}T\mathcal{U}^*$  stimmt an jedem Punkt überein.

**Beweis:** Dies folgt aus Theorem 7.8 bei Stone [22], S. 272-275. □

Es wird sich zeigen, dass es von Interesse ist, den folgenden Spezialfall zu betrachten.

**A.16 Definition:** Ein selbstadjungierter Operator  $T$  hat einfaches Spektrum, falls der Punkt  $\lambda = \mu$  Multiplizität null oder eins bzgl. des Punktspektrums von  $T$  und bzgl. des kontinuierlichen Spektrums von  $T$  besitzt, für alle  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Diese selbstadjungierten Operatoren werden durch den folgenden Satz charakterisiert.

**A.17 Satz:** Ein selbstadjungierter Operator  $T$  besitzt genau dann ein einfaches Spektrum, wenn ein Element  $f \in H$  existiert derart, dass  $\mathfrak{M}(f) = H$ . Ist dies der Fall und tritt (i) oder (ii) in Satz A.13 ein, so besteht die Menge  $\{\psi_k\}$  aus Satz A.13 aus genau einem Element  $\psi_1$ .

**Beweis:** Für einen Beweis dieses Satzes s. Stone [22], Theorem 7.9, S. 275-277. □

Die Sätze A.18 und A.20 samt Beweis habe ich ohne Vorlage aus irgendeiner Veröffentlichung erstellt.

**A.18 Satz:** Es sei  $\Omega$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ , das nicht leer ist. Es sei  $h : \Omega \rightarrow (a, b)$  ein Diffeomorphismus, wobei  $a < b$  reelle Zahlen sind. Betrachte den Hilbertraum  $L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda)$ , wobei die Funktion  $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und stetig in  $\Omega$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Dann ist

$$\mathcal{U} : L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda) \rightarrow L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt), \quad \mathcal{U}f = f \circ h^{-1},$$

eine unitäre Abbildung mit Inverser

$$\mathcal{U}^* : L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt) \rightarrow L^2(\Omega; \rho(\lambda)d\lambda), \quad \mathcal{U}^*g = g \circ h.$$

$M_h$  ist unitär äquivalent zu  $M_{\mathfrak{t}} = \mathcal{U}M_h\mathcal{U}^*$  auf  $L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)$ . Das Spektrum  $\sigma(M_{\mathfrak{t}}) = [a, b]$  von  $M_{\mathfrak{t}}$  ist rein kontinuierlich und besitzt an jedem Punkt  $\lambda \in [a, b]$  die Multiplizität eins.

**Beweis:** Wir bemerken zuerst, dass wegen  $h \circ h^{-1} = \mathbf{t}$

$$(h^{-1})'(t) h'(h^{-1}(t)) = 1 \quad \text{für alle } t \in (a, b)$$

gilt; insbesondere sind

$$(h^{-1})'(t) \neq 0 \quad \text{und} \quad h'(h^{-1}(t)) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b). \quad (*)$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt mit dem Transformationssatz, dass

$$\int_{\Omega} |f(\lambda)|^2 \rho(\lambda) d\lambda = \int_{h^{-1}([a, b])} |f(\lambda)|^2 \rho(\lambda) d\lambda = \int_a^b |f(h^{-1}(t))|^2 |(h^{-1})'(x)| \rho(h^{-1}(x)) dx$$

für alle  $f \in L^2(\Omega; \rho(\lambda) d\lambda)$  und

$$\int_{\Omega} |g(h(\lambda))|^2 \rho(\lambda) d\lambda = \int_a^b |g(t)|^2 \frac{1}{|h'(h^{-1}(t))|} \rho(h^{-1}(t)) dt$$

für alle  $g \in L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt)$ .  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{U}^*$  sind also zwei zueinander inverse Isometrien und daher unitär; offensichtlich gilt  $M_{\mathbf{t}} = \mathcal{U} M_h \mathcal{U}^*$ . Nach Satz 1.13 ist  $M_{\mathbf{t}}$  beschränkt und selbstadjungiert, und das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [a, b]$  von  $M_{\mathbf{t}}$  ist rein kontinuierlich. Um zu zeigen, dass jeder Punkt in  $[a, b]$  die Multiplizität eins besitzt, bemerken wir zunächst, dass wir nach Lemma 1.11 die Funktion  $\rho$  ohne Einschränkung durch die nullstellenfreie Funktion  $\tilde{\rho} : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\tilde{\rho}(t) := \rho(t)$ , falls  $\rho(t) \neq 0$ , und  $\tilde{\rho}(t) := 1$ , falls  $\rho(t) = 0$ , ersetzen können, die stetig in  $\Omega$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Wir schreiben  $\rho$  anstelle von  $\tilde{\rho}$ . Nun folgt zusammen mit (\*), dass die Funktionen  $f : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$  und  $1/f : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$  wohldefiniert sind, wobei

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{|(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t))}} = \sqrt{\frac{h'(h^{-1}(t))}{\rho(h^{-1}(t))}}, \quad t \in (a, b).$$

Es gilt  $f \in L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt)$ , denn

$$\int_a^b |f(t)|^2 |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt = \int_a^b dt = b - a < \infty.$$

Nach Satz 1.13 ist das Spektralmaß  $E$  zu  $M_{\mathbf{t}}$  gegeben durch

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt)), \quad E_A \varphi = \mathbb{1}_{A \cap [a, b]} \cdot \varphi,$$

wobei  $\varphi \in L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt)$ . Daher ist

$$L^2(\mathbb{R}; d\langle E_{\lambda} f, f \rangle) = \left\{ \phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |\phi(t)|^2 dt < \infty \right\} = L^2(a, b).$$

Der durch  $F \mapsto F \cdot f$  definierte Multiplikationsoperator

$$M_f : L^2(a, b) \rightarrow L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt)$$

ist wohldefiniert und isometrisch, denn

$$\int_a^b |F(t)|^2 |f(t)|^2 |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t)) dt = \int_a^b |F(t)|^2 dt, \quad F \in L^2(a, b).$$

Es sei  $g \in L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)$  beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\infty > \int_a^b |g(t)|^2 |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t))dt = \int_a^b \left| g(t) \cdot \frac{1}{f(t)} \right|^2 dt$$

und somit ist  $g/f \in L^2(a, b)$ .  $M_f$  ist also ein isometrischer Isomorphismus, und es folgt, dass

$$\mathfrak{M}(f) = \{F(M_{\mathbf{t}})f : F \in L^2(\mathbb{R}; d\langle E_{\lambda}f, f \rangle)\} = \{F \cdot f : F \in L^2(a, b)\} = L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt).$$

Nach Satz A.17 besitzt der Operator  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)$  einfaches Spektrum, und die Menge  $\{\psi_k\}$  aus Satz A.13 besteht aus genau einem Element  $\psi_1 = f/\sqrt{b-a}$ . Es sei  $\lambda_0 \in [a, b]$  beliebig, aber fest gewählt. Dann existiert die Funktion

$$\begin{aligned} \lambda \mapsto \|E_{(-\infty, \lambda]}\psi_1\|_{L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)}^2 &= \frac{1}{b-a} \int_{(-\infty, \lambda] \cap [a, b]} |f(t)|^2 |(h^{-1})'(t)| \rho(h^{-1}(t))dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{(-\infty, \lambda] \cap [a, b]} dt \end{aligned}$$

und ist auf keinem Intervall konstant, das  $\lambda_0$  als inneren Punkt enthält.  $\square$

**A.19 Bemerkung:** *Unter den Voraussetzungen des Satzes A.18 lässt sich leicht nachprüfen, dass die Abbildung*

$$B([a, b]) \rightarrow L(L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)), \quad F(M_{\mathbf{t}}) = M_F,$$

die Eigenschaften (i) bis (iv) des messbaren Funktionalkalküls erfüllt. Sei nun  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine möglicherweise unbeschränkte Funktion, die  $M_{\mathbf{t}}$ -messbar und  $M_{\mathbf{t}}$ -fast überall definiert sei. Es sei  $x \in \mathfrak{D}_F$ . Definiere für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die beschränkte  $M_{\mathbf{t}}$ -messbare Funktion  $F_n$ , die  $M_{\mathbf{t}}$ -fast überall definiert ist, durch  $F_n(t) := F(t)\mathbf{1}_{A_n}(t)$ , wobei

$$A_n := \{t \in (a, b) : |F(t)| \leq n \text{ } M_{\mathbf{t}}\text{-fast überall}\}.$$

Insbesondere ist  $F_n \in B([a, b])$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ; betrachte dazu  $x = f$  mit  $f$  aus dem Beweis des Satzes A.18. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $F_n$  punktweise  $M_{\mathbf{t}}$ -fast überall gegen  $F$ . Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt, dass

$$\begin{aligned} \|M_{F_n}x - F(M_{\mathbf{t}})x\|_{L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)}^2 &= \|F_n(M_{\mathbf{t}})x - F(M_{\mathbf{t}})x\|_{L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)}^2 \\ &= \|(F_n - F)(M_{\mathbf{t}})x\|_{L^2((a, b); |(h^{-1})'(t)|\rho(h^{-1}(t))dt)}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(\lambda) - F(\lambda)|^2 d\langle E_{\lambda}x, x \rangle \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ ; man beachte, dass  $|F_n(\lambda) - F(\lambda)|^2 \leq 4|F(\lambda)|^2$   $M_{\mathbf{t}}$ -fast überall für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\langle E_{\lambda}x, x \rangle < \infty$$

nach Voraussetzung, denn  $x \in \mathfrak{D}_F$ . Insgesamt sehen wir, dass  $F(M_{\mathbf{t}})f = F \cdot f$  für  $f$  aus dem Beweis des Satzes A.18 und jedes  $F \in L^2(a, b)$ .

**A.20 Satz:** *Es seien  $a$  und  $b$  zwei reelle Zahlen mit  $a < 0 < b$ . Es sei  $\rho_1 : (a, 0) \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion, die höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und die stetig in  $(a, 0)$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte, und es sei  $\rho_2 : (0, b) \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion, die höchstens endlich viele*

Nullstellen besitzt und die stetig in  $(0, b)$  ist bis auf höchstens endlich viele Punkte. Betrachte den Operator  $M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$ . Dieser ist beschränkt und selbstadjungiert, und das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}}) = [a, b]$  von  $M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$  ist rein kontinuierlich und besitzt an jedem Punkt in  $[a, b]$  die Multiplizität eins. Zudem ist der Operator  $M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, b); \rho(t)dt)$ , wobei

$$\rho : (a, b) \rightarrow [0, \infty), \quad \rho(t) := \begin{cases} \rho_1(t), & \text{wenn } t \in (a, 0) \\ 1, & \text{wenn } t = 0 \\ \rho_2(t), & \text{wenn } t \in (0, b) \end{cases},$$

eine Funktion ist, die höchstens endlich viele Nullstellen besitzt und stetig ist bis auf höchstens endlich viele Punkte.

**Beweis:** Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt unmittelbar mit Satz A.18, dass der Operator  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt)$  beschränkt und selbstadjungiert ist, und dass das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [a, 0]$  rein kontinuierlich ist und an jedem Punkt in  $[a, 0]$  Multiplizität eins besitzt. Mit Satz A.18 folgt zudem, dass der Operator  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$  beschränkt und selbstadjungiert ist, und dass das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [0, b]$  rein kontinuierlich ist und an jedem Punkt in  $[0, b]$  Multiplizität eins besitzt. Definiere die Funktion  $\rho$  wie im Satz angegeben. Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{U} : L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt) \rightarrow L^2((a, b); \rho(t)dt), \quad \mathcal{U}(g_1 \oplus g_2) = g,$$

wobei  $g(t) := g_1(t)$ , falls  $t \in (a, 0)$ ,  $g(t) := 1$ , falls  $t = 0$ , und  $g(t) := g_2(t)$ , falls  $t \in (0, b)$ . Da

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}(g_1 \oplus g_2)\|_{L^2((a, b); \rho(t)dt)}^2 &= \|g\|_{L^2((a, b); \rho(t)dt)}^2 \\ &= \int_a^0 |g_1(t)|^2 dt + \int_0^b |g_2(t)|^2 dt \\ &= \|g_1 \oplus g_2\|_{L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)}^2 \end{aligned}$$

für alle  $g_1 \oplus g_2 \in L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$ , ist  $\mathcal{U}$  isometrisch.

Sei nun  $g \in L^2((a, b); \rho(t)dt)$  beliebig. Dann ist  $g_1 := g|_{(a, 0)}$  in  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt)$  und  $g_2 := g|_{(0, b)}$  in  $L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$ , und es gilt  $\mathcal{U}(g_1 \oplus g_2) = g$ , also ist  $\mathcal{U}$  unitär. Offensichtlich ist  $M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, 0); \rho_1(t)dt) \oplus L^2((0, b); \rho_2(t)dt)$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $\mathcal{U}(M_{\mathbf{t}} \oplus M_{\mathbf{t}})\mathcal{U}^* = M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, b); \rho(t)dt)$ . Damit sind wir wieder in der Situation von Satz A.18, und es folgt, dass das Spektrum  $\sigma(M_{\mathbf{t}}) = [a, b]$  von  $M_{\mathbf{t}}$  auf  $L^2((a, b); \rho(t)dt)$  rein kontinuierlich ist, und dass jeder Punkt in  $[a, b]$  die Multiplizität eins besitzt.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Buchholz, *The confluent hypergeometric function*, Springer, 1969
- [2] C. Costara, D. Popa, *Exercises in functional analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2003
- [3] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc., 2002
- [4] G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1998
- [5] H. Jeffreys, *Methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, 1956
- [6] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Wiley, 1968
- [7] H. -H. Kairies, *Über die logarithmische Ableitung der Gammafunktion*, Math. Ann. **184** (1970), S. 157-162
- [8] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, 1964
- [9] K. Kodaira, *The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices*, Amer. J. Math. vol. **71** (1949), S. 921-945
- [10] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer, 2004
- [11] V. Kostykin, K. A. Makarov, *On Krein's example*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), S. 2067-2071
- [12] M. G. Krein, *On the trace formula in perturbation theory*, Mat. Sbornik N.S. **33(75)** (1953), S. 597-626 (Russisch)
- [13] S. Lang, *Real and functional analysis*, Springer, 1993
- [14] N. K. Nikolski, *Operators, functions and systems: An easy reading, Volume 1*, Amer. Math. Soc., 2002
- [15] F. Oberhettinger, *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer, 1957
- [16] V. V. Peller, *Hankel Operators and their applications*, Springer, 2003
- [17] S. C. Power, *Hankel operators on Hilbert space*, Pitman, Boston, MA, 1982
- [18] R. Remmert, *Funktionentheorie II, Kurseinheit 4: Produktdarstellungen - Satz von Weierstraß*, Fernuniversität Hagen, 1983
- [19] M. Rosenblum, *On the Hilbert matrix, I*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), S. 137-140
- [20] M. Rosenblum, *On the Hilbert matrix, II*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), S. 581-585

- [21] H. Shanker, *An integral equation for Whittaker's confluent hypergeometric function*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), S. 482-483
- [22] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc., 1964
- [23] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., 1967
- [24] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil II: Anwendungen*, Teubner, 2003
- [25] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 2007
- [26] H. Weyl, *Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Math. Ann. **68** (1910), S. 220-269

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

---

Ort, Datum

---

Christoph Uebersohn