**Bachelorarbeit**

# Der Dirichletsche Primzahlsatz

vorgelegt von
Matthias Nickel

Fachbereich 08 Physik, Mathematik und Informatik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

3. Juni 2012

Betreuer: Prof. Dr. Stefan Müller-Stach

# Inhaltsverzeichnis

**Einleitung** **1**

**1 Arithmetische Funktionen** **2**

**2 Dirichlet-Reihen** **3**

**3 Charaktere und Charakterrelationen** **7**
3.1 Charaktere . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
3.2 Charakterrelationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**4 Der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes** **11**
4.1 Die Riemannsche $\zeta$-Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
4.2 Dirichletsche L-Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
4.3 Der Dirichletsche Primzahlsatz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**Literaturverzeichnis** **24**

# Einleitung

Im Jahr 1808 veröffentlichte Adrien-Marie Legendre im Alter von 19 Jahren einen vermeintlichen Beweis dafür, dass zu teilerfremden natürlichen Zahlen $a, n$ unendlich viele Primzahlen $p$ mit $p \equiv a \mod n$ existieren. Der Beweis enthielt allerdings eine Lücke, die Legendre nicht schließen konnte.

In einer Arbeit aus dem Jahr 1837 führte Gustave Lejeune Dirichlet schließlich den Beweis anders als Legendre mithilfe von Dirichlet-Reihen, daher der Name *Dirichletscher Primzahlsatz* [T, S. 137 f].

In der vorliegenden Arbeit soll dieser Satz bewiesen werden. Dies ist eine Vertiefung des im Sommersemester 2011 an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz von Herrn Univ.-Prof. Dr. Stefan Müller-Stach gehaltenen Hauptseminars „Die Riemannsche $\zeta$-Funktion". Dabei diente haupstächlich das Skript der von Otto Forster im Wintersemester 2008/09 an der LMU München gehaltenen Vorlesung „Die Riemannsche Zetafunktion" [F] als Quelle. Da jedoch in dieser Vorlesung der Dirichletsche Primzahlsatz nicht besprochen wurde, orientiert sich diese Arbeit weitestgehend am Buch von Jörg Brüdern [B].

# 1 Arithmetische Funktionen

**Definition 1.1.** *Unter einer* arithmetischen Funktion *versteht man eine Abbildung*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

*Gilt* $a(m \cdot n) = a(m) \cdot a(n)$ *für alle teilerfremden natürlichen Zahlen* $m, n \in \mathbb{N}$ *und verschwindet* $a$ *nicht identisch, so nennt man* $a$ multiplikativ*. Ist die obige Gleichung sogar für alle natürlichen Zahlen* $m, n \in \mathbb{N}$ *erfüllt, so nennt man* $a$ vollständig multiplikativ*.*
*Die Menge aller* arithmetischen Funktionen *wird mit* $\mathcal{A}$ *bezeichnet.*

Multiplikative Funktionen sind wegen des Fundamentalsatzes der Arithmetik schon durch ihre Werte auf Primzahlpotenzen eindeutig festgelegt.

Die Eulersche $\varphi$-Funktion ist ein Beispiel für eine multiplikative, aber nicht vollständig multiplikative Funktion. Sie ist definiert durch $\varphi(n) := \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher multiplikativ nach dem Chinesischen Restsatz. Es gilt jedoch $\varphi(4) = 2 \neq 1 = \varphi(2) \cdot \varphi(2)$.

**Definition 1.2** (Faltung arithmetischer Funktionen)**.** *Seien* $a, b \in \mathcal{A}$ *arithmetische Funktionen. Die* Faltung $a * b \in \mathcal{A}$ *von* $a$ *und* $b$ *ist definiert durch*

$$(a * b)(n) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Faltung zweier multiplikativer Funktionen ist multiplikativ, denn für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}(a * b)(n) \cdot (a * b)(m) &= \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \sum_{l|m} a(l) b\left(\frac{m}{l}\right) \\ &= \sum_{\substack{d|n \\ l|m}} a(d) a(l) b\left(\frac{n}{d}\right) b\left(\frac{m}{l}\right) = \sum_{\substack{d|n \\ l|m}} a(dl) b\left(\frac{nm}{dl}\right) \\ &= \sum_{r|nm} a(r) b\left(\frac{nm}{r}\right) = (a * b)(nm),\end{aligned}$$

denn die Teiler von $m$ und $n$ sind wieder teilerfremd.

Die Faltung vollständig multiplikativer Funktionen ist jedoch im Allgemeinen nicht vollständig multiplikativ. Man betrachte beispielsweise $\varepsilon, \tau \in \mathcal{A}$ mit
$\varepsilon(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\tau := \varepsilon * \varepsilon = \sum_{d|n} 1$ :
$\tau(2) = 2$, aber $\tau(4) = 3$, also ist $\tau$ nicht vollständig multiplikativ.

**Satz 1.3.** $(\mathcal{A}, +, *)$ *ist ein kommutativer Ring mit Einselement. Die Einheiten von* $\mathcal{A}$ *sind genau die* $f \in \mathcal{A}$*, für die* $f(1) \neq 0$ *ist.*

**Beweis:** [B, Satz 1.3.1]. □

## 2 Dirichlet-Reihen

Einer arithmetischen Funktion $a \in \mathcal{A}$ kann stets eine formale Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ zugeordnet werden. Im Folgenden werden nur die konvergenten Dirichlet-Reihen eine Rolle spielen.

**Lemma 2.1.** *Seien $a, b \in \mathcal{A}$, $s \in \mathbb{C}$ fest und $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}$ absolut konvergent. Dann gilt*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (a * b)(k)k^{-s}.$$

**Beweis:** Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen darf umgeordnet werden und man erhält

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b(m)m^{-s}\right) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a(n)b(m)(nm)^{-s}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{d|k} a(d)b\left(\frac{k}{d}\right)\right)k^{-s}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(a*b)(k)k^{-s}.\end{aligned}$$

□

Absolut konvergente Dirichlet-Reihen zu multiplikativen arithmetischen Funktionen haben zusätzlich eine Darstellung als unendliches Produkt, wie der folgende Satz zeigt [B, Satz 1.4.1].

**Satz 2.2** (Euler-Produkt)**.** *Sei $f \in \mathcal{A}$ multiplikativ, $s \in \mathbb{C}$ fest und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ konvergiere absolut. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p}\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)p^{-ks}, \tag{1}$$

*wobei das Produkt auf der rechten Seite alle Primzahlen $p$ durchläuft.*
*Ist $f$ vollständig multiplikativ, so gilt darüber hinaus*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p}\frac{1}{1-f(p)p^{-s}}\,. \tag{2}$$

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $N$ so groß, dass $\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n)n^{-s}| < \varepsilon$. Sei $\mathcal{P}$ eine endliche Menge von Primzahlen, die alle Primzahlen kleiner oder gleich $N$ enthalte. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)p^{-ks}$ absolut konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ absolut konvergiert und wegen des Fundamentalsatzes der Arithmetik gilt

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)p^{-ks} = \sum_{\substack{n\\ p|n \Rightarrow p\in\mathcal{P}}} f(n)n^{-s},$$

denn die Bedingung $p \mid n \Rightarrow p \in \mathcal{P}$ ist äquivalent dazu, dass in der Primfaktorzerlegung von $n$ nur Primzahlen aus $\mathcal{P}$ auftreten. Insbesondere ist dies für $n \leq N$ erfüllt.
Es folgt nun

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} - \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) p^{-ks} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n) n^{-s}| < \varepsilon\,.$$

Dies zeigt (1).

Ist $f$ vollständig multiplikativ, so gilt darüber hinaus

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) p^{-ks} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(p) p^{-s})^k = \frac{1}{1 - f(p) p^{-s}}\,,$$

da die obige Reihe konvergiert. Damit ist auch (2) bewiesen. $\square$

Als nächstes soll nun die Konvergenz der Dirichlet-Reihen untersucht werden. Als Hilfsmittel wird noch folgendes Lemma benötigt.

**Lemma 2.3** (Abelsche partielle Summation)**.** *Sei $M \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $M < x$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei $f : [M, x] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Definiert man für $y \in \mathbb{R}$*

$$A(y) := \sum_{M \leq n \leq y} a_n\,,$$

*so gilt*

$$\sum_{M \leq n \leq x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_M^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t. \tag{3}$$

**Beweis:** Für $r \in \mathbb{R}$ sei $[r] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq r\}$. Wegen $A(x) = A([x])$ lässt sich die rechte Seite der Gleichung folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} A(x) f(x) - \int_M^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t &= A([x]) f(x) - \int_M^{[x]} A(t) f'(t) \mathrm{d}t - \int_{[x]}^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t \\ &= A([x]) f(x) - \int_M^{[x]} A(t) f'(t) \mathrm{d}t - A([x])(f(x) - f([x])) \\ &= A([x]) f([x]) - \int_M^{[x]} A(t) f'(t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung wird ebenfalls nicht verändert, wenn $x$ durch $[x]$ ersetzt wird. Also muss man die Gleichheit nur für $x = N$ mit $N \in \mathbb{N}$ nachweisen.

Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_M^N A(t)f'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{l=M}^{N-1} \int_l^{l+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{l=M}^{N-1} A(l)(f(l+1)-f(l)) \\
&= \sum_{l=M+1}^{N} A(l-1)f(l) - \sum_{l=M}^{N-1} A(l)f(l) \\
&= A(N-1)f(N) - A(M)f(M) - \sum_{l=M+1}^{N-1} a_l f(l) \\
&= A(N)f(N) - \sum_{l=M}^{N} a_l f(l).
\end{aligned}$$

Dies zeigt (3). □

Mithilfe der Abelschen partiellen Summation kann jetzt der folgende Satz bewiesen werden [B, Satz 1.4.2].

**Satz 2.4.** *Seien $a \in \mathcal{A}$, $s_0 \in \mathbb{C}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ konvergiere bei $s = s_0$. Dann ist die Reihe für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig konvergent auf $W_\delta := \{s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s-s_0)| \le \frac{\pi}{2} - \delta\}$.*

**Beweis:** Sei $s \in W_\delta$, $f(t) = t^{s_0 - s}$ und $1 \le M \le N$. Damit ist $n^{-s} = n^{-s_0} f(n)$ und es gilt mit Lemma 2.3

$$\begin{aligned}
\sum_{M \le n \le N} a(n)n^{-s} &= \sum_{M \le n \le N} a(n)n^{-s_0} f(n) = N^{s_0 - s} \sum_{M \le n \le N} a(n)n^{-s_0} \\
&\quad - \int_M^N \left( \sum_{M \le n \le t} a(n)n^{-s_0} \right) (s_0 - s) t^{s_0 - s - 1} \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s_0}$ konvergiert, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon$, sodass für alle $M \ge M_\varepsilon$ und $t \ge M$ gilt: $|\sum_{M \le n \le t} a(n)n^{-s_0}| < \varepsilon$. Man hat $|t^z| = |t^{\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}| = t^{\mathrm{Re}(z)}$ für $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ und mit $\sigma := \mathrm{Re}(s)$, $\sigma_0 := \mathrm{Re}(s_0)$ gilt dann für $M \ge M_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{M \le n \le N} a(n)n^{-s} \right| &\le \varepsilon \left( N^{\mathrm{Re}(s_0 - s)} + |s_0 - s| \int_M^\infty t^{\mathrm{Re}(s_0 - s - 1)} \mathrm{d}t \right) \\
&= \varepsilon \left( N^{\sigma_0 - \sigma} + |s - s_0| \lim_{r \to \infty} \left[ \frac{t^{\sigma_0 - \sigma}}{\sigma_0 - \sigma} \right]_M^r \right) \\
&= \varepsilon \left( N^{\sigma_0 - \sigma} + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} M^{\sigma_0 - \sigma} \right) \\
&\le \varepsilon \left( 1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right) \le \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{\sin(\delta)} \right)\,,
\end{aligned}$$

wegen $\sigma_0 - \sigma < 0$ für $s \in W_\delta$ und weil

$$\begin{aligned}
\sigma - \sigma_0 &= \mathrm{Re}(s - s_0) = \mathrm{Re}(|s - s_0| e^{i \arg(s - s_0)}) = |s - s_0| \cos(\arg(s - s_0)) \\
&\ge |s - s_0| \cos\left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = |s - s_0| \sin(\delta)\,,
\end{aligned}$$

also

$$\frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \leq \frac{1}{\sin(\delta)} \, .$$

Dies zeigt die Konvergenz der Reihe in $W_\delta$. Durch Grenzwertbildung für $N \to \infty$ folgt außerdem

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} - \sum_{n=1}^{M_\varepsilon - 1} a(n) n^{-s} \right| = \left| \sum_{n \geq M_\varepsilon} a(n) n^{-s} \right| \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{\sin(\delta)} \right) \, ,$$

womit auch die gleichmäßige Konvergenz in $W_\delta$ bewiesen ist. □

**Definition 2.5.** *Sei* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ *eine Dirichlet-Reihe. Dann wird*

$$\sigma_c(f) := \inf\{Re\, s \mid \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} \textit{ konvergiert}\}$$

bedingte Konvergenz-Abszisse *genannt.*

**Folgerung 2.6.** *Sei* $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ *eine Dirichlet-Reihe.*
*Da jede hinreichend kleine Kreisscheibe mit Mittelpunkt in der Halbebene* $H_{\sigma_c(f)} := \{s \in \mathbb{C} \mid Re\, s > \sigma_c(f)\}$ *für geeignetes* $s_0 \in H_{\sigma_c(f)}$*, für das die Reihe konvergiert und geeignetes* $\delta > 0$ *in einem* $W_\delta$ *wie in Satz 2.4 enthalten ist, konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ *lokal gleichmäßig in* $H_{\sigma_c(f)}$ *und ist dort holomorph.*

# 3 Charaktere und Charakterrelationen

In diesem Kapitel werden Charaktere behandelt. Es orientiert sich an [B, 1.5]. Die Charakterrelationen werden für den Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes noch sehr wichtig sein.

## 3.1 Charaktere

**Definition 3.1.** *Sei $G$ eine endliche abelsche Gruppe. Ein Charakter von $G$ ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times .$$

Für endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt der folgende Hauptsatz.

**Satz 3.2.** *Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zu einem endlichen Produkt zyklischer Gruppen.*

**Beweis:** [MP, Satz 6.13]. □

Sei nun $G$ eine endliche abelsche Gruppe (multiplikativ geschrieben). Aus obigem Satz folgt, dass $G$ zu einem endlichen Produkt endlich zyklischer Gruppen $G_1, \ldots, G_m$ isomorph ist.
Das bedeutet, jedes $g \in G$ hat eine Darstellung $g = \prod_{i=1}^m g_i^{n_i}$, mit $0 \leq n_i < \#G_i$ und $G_i \simeq \langle g_i \rangle$. Hieraus erhält man

$$\chi(g) = \prod_{i=1}^{m} \chi(g_i)^{n_i} .$$

Ein Charakter $\chi$ von $G$ ist also durch $\chi(g_i)$ eindeutig festgelegt.

Für das neutrale Element $\mathcal{E}$ in $G$ gilt

$$1 = \chi(\mathcal{E}) = \chi(g_i^{\#G_i}) = \chi(g_i)^{\#G_i},$$

also ist $\chi(g_i) = \exp(2\pi i\, k_i/\#G_i)$ für ein $0 \leq k_i < \#G_i$. Folglich kann es maximal $\prod_{i=1}^m \#G_i = \#G$ verschiedene Charaktere von G geben.

Für jede Wahl von $k_1, \ldots, k_m$ mit $0 \leq k_i < \#G_i$ kann vermöge $\chi(g) = \prod_{i=1}^m \chi(g_i)^{n_i}$ ein Charakter $\chi$ konstruiert werden, der $\chi(g_i) = \exp(2\pi i\, k_i/\#G_i)$ erfüllt. Zusammenfassend gibt es also $\#G$ verschiedene Charaktere von G.

**Satz 3.3.** *Die Menge aller Charaktere von $G$ bildet mit folgender Verknüpfung von Charakteren $\chi, \psi$ von $G$*

$$\chi\psi(g) := \chi(g)\psi(g) \quad \textit{für alle } g \in G$$

*eine abelsche Gruppe, die mit $\hat{G}$ bezeichnet wird.*

**Beweis:** Die oben definierte Verknüpfung ist kommutativ und assoziativ. Man betrachte nun den Charakter $\chi_0$, der durch $\chi_0(g) := 1$ für alle $g \in G$ definiert ist. $\chi_0$ wird Hauptcharakter genannt und stellt das neutrale Element von $\hat{G}$ dar. Für einen Charakter $\chi$ ist $\overline{\chi} \in \hat{G}$ mit $\overline{\chi}(g) := \chi(g)^{-1}$ für alle $g \in G$ das Inverse. $\square$

Es gilt $\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$ wegen $|\chi(g)| = 1$ für $g \in G$.

## 3.2 Charakterrelationen

**Satz 3.4.** *Sei $G$ eine endliche abelsche Gruppe.*
*Für alle $g \in G$ gilt*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} \#G & \textit{falls } g = \mathcal{E}, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

*Für alle $\chi \in \hat{G}$ gilt*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} \#G & \textit{falls } \chi = \chi_0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

**Beweis:** Sei $g = \mathcal{E}$. Dann ist

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} 1 = \#\hat{G} = \#G\,.$$

Ist $g \neq \mathcal{E}$, so gibt es einen Charakter $\psi \in \hat{G}$ mit $\psi(g) \neq 1$.
Daher gilt

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)\psi(g) = \psi(g) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g),$$

denn mit $\chi$ durchläuft auch $\chi\psi$ alle Elemente von $\hat{G}$, weil die durch Multiplikation mit $\psi$ gegebene Abbildung von $\hat{G}$ nach $\hat{G}$ die Multiplikation mit $\psi^{-1}$ als Umkehrabbildung besitzt und damit bijektiv ist.
Daraus folgt

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)(1 - \psi(g)) = 0,$$

also muss $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$ gelten, womit (4) bewiesen ist.

Für $\chi = \chi_0$ ist

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} 1 = \#G.$$

Ist $\chi \neq \chi_0$, so gibt es ein $h \in G$ mit $\chi(h) \neq 1$. Es folgt

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(gh) = \sum_{g \in G} \chi(g)\chi(h) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g),$$

da genauso wie oben mit $g$ auch $gh$ alle Elemente von G durchläuft.
Man erhält

$$\sum_{g \in G} \chi(g)(1 - \chi(h)) = 0\,,$$

also gilt $\sum_{g\in G}\chi(g)=0$, was (5) beweist. $\square$

**Satz 3.5.** *Sei $G$ eine endliche abelsche Gruppe.*
*Für $h,g\in G$ und $\chi,\psi\in\hat{G}$ gilt*

$$\sum_{\chi\in\hat{G}}\overline{\chi}(h)\chi(g)=\begin{cases}\#G & \text{falls } g=h,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}\tag{6}$$

$$\sum_{g\in G}\overline{\psi}(g)\chi(g)=\begin{cases}\#G & \text{falls } \chi=\psi,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\tag{7}$$

**Beweis:** Ersetzt man in (4) $g$ mit $h^{-1}g$, so erhält man wegen

$$\chi(h^{-1}g)=\chi(h^{-1})\chi(g)=\chi(h)^{-1}\chi(g)=\overline{\chi}(h)\chi(g),$$

und da $h^{-1}g=\mathcal{E}$ äquivalent zu $g=h$ ist, Gleichung (6).

Wird in (5) $\chi$ durch $\overline{\psi}\chi$ ersetzt, so ergibt sich wegen der Äquivalenz von $\overline{\psi}\chi=\chi_0$ und $\chi=\psi$ Gleichung (7). $\square$

Beim Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes werden nur Charaktere von $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ mit $q\in\mathbb{N}$ betrachtet.

**Definition 3.6.** *Sei $G=(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ und $\chi$ ein Charakter von $G$. $\chi$ wird auf natürliche Weise durch folgende Definition zu einer Funktion auf $\mathbb{Z}$*

$$\chi(n):=\begin{cases}\chi(n+q\mathbb{Z}) & \text{falls } (n,q)=1\ ,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

*und wird dann als* Dirichlet-Charakter (modulo q) *bezeichnet.*

**Lemma 3.7.** *Ein Dirichlet-Charakter modulo $q$ ist vollständig multiplikativ und es gilt für $(a,q)=1$*

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(a)\chi(n)=\begin{cases}1 & \text{falls } n\equiv a \mod q,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}\tag{8}$$

*wobei die Summe alle Dirichlet-Charaktere modulo $q$ durchlaufe.*

**Beweis:** Sei $\chi$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Seien $a,b\in\mathbb{Z}$. Hat $a$ oder $b$ einen gemeinsamen Teiler mit $q$, so ist $(ab,q)>1$, also gilt

$$\chi(a)\chi(b)=0=\chi(ab).$$

Ist $(a,q)=1$ und $(b,q)=1$, so ist auch $(ab,q)=1$ und man erhält

$$\chi(a)\chi(b)=\chi(a+q\mathbb{Z})\chi(b+q\mathbb{Z})=\chi(ab+q\mathbb{Z})=\chi(ab).$$

$\chi$ ist also vollständig multiplikativ.

Um Gleichung (8) zu beweisen, sei zunächst $(n, q) > 1$. Dann ist $\chi(n) = 0$, also verschwindet die linke Seite der Gleichung. Die rechte Seite verschwindet ebenfalls, denn wegen $(a, q) = 1$ folgt $n \not\equiv a \mod q$.

Für $(n, q) = 1$ ergibt (6)

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a + q\mathbb{Z})\chi(n + q\mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv a \mod q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Der Ausdruck (8) wird beim Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes benutzt werden.

# 4 Der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes

In diesem Kapitel wird analog zu [B, 1.6] der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes geführt.

## 4.1 Die Riemannsche $\zeta$-Funktion

Da die $\zeta$-Funktion eine wichtige Rolle im Beweis spielt, sollen hier zunächst einige wichtige Eigenschaften erörtert werden.

**Definition 4.1.** *Die Riemannsche $\zeta$-Funktion ist definiert durch*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

**Satz 4.2.** *$\zeta(s)$ konvergiert absolut und lokal gleichmäßig in der Halbebene $H_1 := \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 1\}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.*

**Beweis:** Sei $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 1$. Dann gilt

$$|n^{-s}| = |n^{-\sigma-it}| = |n^{-\sigma}||n^{-it}| = n^{-\sigma},$$

weil $|n^{-it}| = |\exp(-it\log(n))| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}.$$

Außerdem ist

$$\int_1^{\infty} x^{-\sigma}\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{-\sigma+1}}{-\sigma+1}\right]_1^x = \frac{1}{\sigma-1}\,,$$

da $\lim_{x\to\infty} x^{-\sigma+1} = 0$ wegen $-\sigma + 1 < 0$. Mit dem Integralkriterium folgt nun die absolute Konvergenz der Reihe für $\mathrm{Re}(s) > 1$, also gilt für die bedingte Konvergenz-Abszisse $\sigma_c(\zeta) \leq 1$. Daher ist $\zeta(s)$ nach Folgerung 2.6 in $H_1$ holomorph. □

**Satz 4.3.** *Die $\zeta$-Funktion ist auf $H_0 \setminus \{1\}$ mit $H_0 := \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 0\}$ holomorph fortsetzbar. Bei $s = 1$ besitzt die fortgesetzte $\zeta$-Funktion einen Pol der Ordnung 1 mit Residuum 1.*

**Beweis:** Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt mit Abelscher partieller Summation (Lemma 2.3) und $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $A(x) := \sum_{1\leq n\leq x} a_n = [x]$, sowie $f(x) := x^{-s}$

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{x} a_n f(n) = \lim_{x\to\infty}\left([x]x^{-s} + s\int_1^x [t]t^{-s-1}\mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}[x]x^{-s} + s\int_1^{\infty}[t]t^{-s-1}\mathrm{d}t = s\int_1^{\infty}[t]t^{-s-1}\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

da wegen $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\left|\lim_{x\to\infty}[x]x^{-s}\right| = \lim_{x\to\infty}|[x]x^{-s}| \leq \lim_{x\to\infty} x^{-\mathrm{Re}(s)+1} = 0\,.$$

Man erhält also mit $\{t\} := t - [t]$

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= s\int_1^\infty [t]\, t^{-s-1}\mathrm{d}t = s\int_1^\infty (t-\{t\})\, t^{-s-1}\mathrm{d}t \\
&= s\int_1^\infty t^{-s}\mathrm{d}t - s\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t = s\lim_{x\to\infty}\left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^x - s\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t\,, \qquad (9)
\end{aligned}$$

denn wie oben ist $\lim_{x\to\infty} x^{-s+1} = 0$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Nun muss noch das in (9) vorkommende Integral betrachten werden. Man erhält

$$\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t\,,$$

und hierbei ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t &= \int_n^{n+1} (t-n)\, t^{-s-1}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} t^{-s}\mathrm{d}t - n\int_n^{n+1} t^{-s-1}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_n^{n+1} - n\left[\frac{t^{-s}}{-s}\right]_n^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^{-s+1} - n^{-s+1}}{-s+1} - n\left[\frac{t^{-s}}{-s}\right]_n^{n+1}
\end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion für $\mathrm{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$ und holomorph fortsetzbar bei $s = 1$, da dann der Zähler des ersten Bruchs auf der rechten Seite verschwindet. Des Weiteren gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \delta$, wobei $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\int_n^{n+1} \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t\right| &\le \int_n^{n+1} \left|\{t\}\, t^{-s-1}\right| \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \{t\}\, t^{-\mathrm{Re}(s)-1}\mathrm{d}t \\
&\le \int_n^{n+1} t^{-\delta-1}\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}$$

da $0 \le \{t\} < 1$. Schließlich ergibt sich

$$\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} t^{-\delta-1}\mathrm{d}t = \int_1^\infty t^{-\delta-1}\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{t^{-\delta}}{-\delta}\right]_1^x = \frac{1}{\delta} < \infty\,.$$

Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium ist daher $\int_1^\infty \{t\}\, t^{-s-1}\mathrm{d}t$ holomorph auf $H_\delta := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \delta\}$ für alle $\delta > 0$ und somit auch auf $H_0$.

Nun ist bewiesen, dass alle Summanden in (9) auf $H_0 \setminus \{1\}$ holomorph sind, also ist (9) die holomorphe Fortsetzung der $\zeta$-Funktion auf $H_0 \setminus \{1\}$.
Bei $s = 1$ sind alle Summanden außer $\frac{1}{s-1}$ holomorph, $\zeta(s)$ besitzt also dort einen einfachen Pol mit Residuum 1. $\square$

## 4.2 Dirichletsche L-Funktionen

Nun werden den Charakteren $\chi$ modulo $q$ für $q \in \mathbb{N}$ Dirichlet-Reihen zugeordnet. Dies geschieht durch folgende Definition.

**Definition 4.4.** *Sei $q \in \mathbb{N}$, $\chi$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Dann ist die dazugehörige Dirichlet-Reihe $L(s,\chi)$ definiert durch*

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

*$L(s,\chi)$ wird auch als* Dirichletsche L-Funktion *bezeichnet.*

**Lemma 4.5.** *Für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 1$ und alle Dirichlet-Charaktere $\chi$ modulo $q$, $q \in \mathbb{N}$ ist $L(s,\chi)$ absolut konvergent und es gilt*

$$L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\,. \tag{10}$$

*Ist $\chi = \chi_0$, so gilt*

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - p^{-s}\right)\,, \tag{11}$$

*wobei $p$ stets alle Primzahlen durchlaufe.*

**Beweis:** Sei $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\chi(n) n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mathrm{Re}(s)} = \zeta(\mathrm{Re}(s)) < \infty\,,$$

nach Satz 4.2, also ist $L(s,\chi)$ absolut konvergent. $\chi$ ist vollständig multiplikativ (Lemma 3.7), also gilt (10) nach Satz 2.2 . Analog gilt wieder nach Satz 2.2 für die $\zeta$-Funktion

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Mit (10) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} L(s,\chi_0) &= \prod_{\substack{p \\ (p,q)=1}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p \nmid q} \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \left( \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \right) \prod_{p|q} \left(1-p^{-s}\right) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1-p^{-s}\right)\,, \end{aligned}$$

womit (11) bewiesen ist. □

Mit dem folgenden Satz erhält man nun Aufschluss über die Konvergenz von $L(s,\chi)$ für $\chi \neq \chi_0$ und $\mathrm{Re}(s) > 0$.

**Satz 4.6.** *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Dirichlet Charakter modulo $q$. Dann konvergiert $L(s,\chi)$ für alle $s \in H_0 = \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 0\}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.*

**Beweis:** Sei $A(x) := \sum_{n \leq x} \chi(n)$. Man hat

$$A(q) = \sum_{n \leq q} \chi(n) = \sum_{\substack{n \leq q \\ (n,q)=1}} \chi(n) = 0$$

nach der Charakterrelation (5), da $\chi \neq \chi_0$ . $\chi(n)$ hängt nur von der Restklasse von $n$ in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ab, also ist $\chi(n+kq) = \chi(n)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$A(lq) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=(i-1)q+1}^{iq} \chi(n) = lA(q) = 0\,.$$

Für beliebiges $x > 0$ ergibt sich also mit $[x] = mq + r$, $m, r \in \mathbb{N}$ und $r < q$

$$|A(x)| = |A([x])| = |A(mq+r)| \leq |A(mq)| + \sum_{n=mq+1}^{mq+r} |\chi(n)| = \sum_{n=1}^{r} |\chi(n)| \leq q\,,$$

da $|\chi(n)| \leq 1$.
Seien nun $M, N \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq N \leq M$ und $s \in H_0$. Wendet man Abelsche partielle Summation (Lemma 2.3) an, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{N \leq n \leq M} \chi(n) n^{-s}\right| = \left|\sum_{N \leq n \leq M} \chi(n)\, M^{-s} + s \int_N^M \sum_{N \leq n \leq x} \chi(n)\, x^{-s-1} \mathrm{d}x\right| \\
&\leq |A(M) - A(N-1)| M^{-\mathrm{Re}(s)} + |s| \int_N^M |A(x) - A(N-1)| x^{-\mathrm{Re}(s)-1} \mathrm{d}x \\
&\leq 2qN^{-\mathrm{Re}(s)} + 2q|s| \int_N^\infty x^{-\mathrm{Re}(s)-1} \mathrm{d}x = 2qN^{-\mathrm{Re}(s)} + 2q|s| \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-\mathrm{Re}(s)}}{-\mathrm{Re}(s)}\right]_N^t \\
&= 2q\left(1 + \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\right) N^{-\mathrm{Re}(s)} = \mathcal{O}\left(\left(1 + \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\right) N^{-\mathrm{Re}(s)}\right) \quad (N \to \infty). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Der obenstehende Ausdruck konvergiert nun gegen 0 für $N \to \infty$, da $\mathrm{Re}(s) > 0$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergiert also $L(s,\chi)$. Dies bedeutet, dass $\sigma_c(L(s,\chi)) \leq 0$, also ist $L(s,\chi)$ nach Folgerung 2.6 holomorph auf $H_0$. □

Von nun an soll $\log L(s,\chi)$ für $s \in \mathbb{R}, s \geq 1$ untersucht werden. Hierfür ist es nötig, die Nullstellen von $L(s,\chi)$ in diesem Bereich zu kennen. Insbesondere ist von zentraler Bedeutung, ob $L(1,\chi) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$ ist.

**Satz 4.7.** *Sei $\chi$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Dann hat $L(s,\chi)$ keine Nullstellen für $s \in \mathbb{R}$ und $s > 1$.*

**Beweis:** Sei $s \in \mathbb{R}, s > 1$. Man betrachte das Eulerprodukt (10)

$$L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}\,.$$

Sei

$$a_n := \frac{1}{1-\chi(n)n^{-s}} - 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Man hat

$$|1-\chi(n)n^{-s}| \geq 1 - |\chi(n)n^{-s}| \geq 1 - n^{-s} \geq 1 - 2^{-s}$$

für $n \geq 2$ und erhält

$$|a_n| = \left|\frac{1}{1-\chi(n)n^{-s}} - 1\right| = \left|\frac{\chi(n)n^{-s}}{1-\chi(n)n^{-s}}\right| \leq \frac{n^{-s}}{1-2^{-s}}\,.$$

Es gilt also

$$L(s,\chi) = \prod_p (1 + a_p)$$

und

$$\sum_p |a_p| \leq \sum_{n\geq 2} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{1-2^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}}\,\zeta(s) < \infty\,.$$

Das unendliche Produkt konvergiert also absolut. Nach [FB, Kapitel IV Bemerkung 1.6] gilt daher, dass das unendliche Produkt genau dann verschwindet, wenn einer der Faktoren $1 + a_p = \left(1-\chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$ verschwindet, was unmöglich ist. Somit ist $L(s,\chi) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}, s > 1$. □

Im folgenden Satz wird nun ein Zweig des Logarithmus von $L(s,\chi)$ auf dem Intervall $(1,\,\infty)$ beziehungsweise $[1,\,\infty)$, falls $\chi \neq \chi_0$ und $L(1,\chi) \neq 0$, angegeben. Dies kann wie in [B] mithilfe von Satz 4.7 geschehen. Hier soll aber ein anderer Weg benutzt werden, der ohne Satz 4.7 auskommt.

**Satz 4.8.** *Sei $\chi$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Dann ist für $s \in \mathbb{R}, s > 1$ durch*

$$\log L(s,\chi) := \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\chi(p^k)p^{-ks} \tag{13}$$

*eine auf dem reellen Intervall $(1,\,\infty)$ stetige Funktion gegeben und man erhält*

$$\exp(\log L(s,\chi)) = L(s,\chi)\,.$$

*Ist darüber hinaus $\chi \neq \chi_0$ und $L(1,\chi) \neq 0$, so kann $\log L(s,\chi)$ stetig auf das Intervall $[1,\,\infty)$ fortgesetzt werden und es gilt wieder*

$$\exp(\log L(1,\chi)) = L(1,\chi)\,.$$

**Beweis:** Zuerst ist die gleichmäßige Konvergenz von (13) auf $(1,\,\infty)$ zu zeigen. Sei hierfür $s \in \mathbb{R}$, $s \geq \delta > 1$. Es bezeichne Log den Hauptzweig des Logarithmus. Dann gilt $\left|\frac{1}{k}\,\chi(p^k)p^{-ks}\right| \leq \frac{1}{k}\,p^{-\delta\,k}$ und

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(p^{-\delta}\right)^k &= -\sum_p \operatorname{Log}(1-p^{-\delta}) = \sum_p \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-\delta}}\right)\\ &= \operatorname{Log}\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-\delta}}\right) = \operatorname{Log}(\zeta(\delta)) < \infty\,,\end{aligned}$$

denn $\zeta(\delta) \in \mathbb{R}$ und $\zeta(\delta) > 1$.
Damit ist (13) nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium gleichmäßig konvergent und damit stetig auf $[\delta, \infty)$ für alle $\delta > 1$, da $\frac{1}{k}\,\chi(p^k)p^{-ks}$ stetig auf $[\delta, \infty)$ ist. $\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\chi(p^k)p^{-ks}$ konvergiert also auf $(1, \infty)$ gegen eine stetige Funktion. Für alle $s \in \mathbb{R}, s > 1$ ist nun

$$\begin{aligned}\exp(\log L(s,\chi)) &= \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\chi(p^k)p^{-ks}\right) = \prod_p \exp(-\mathrm{Log}(1-\chi(p)p^{-s})) \\ &= \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = L(s,\chi)\,.\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Aussage sei $\chi \neq \chi_0$ und $L(1,\chi) \neq 0$. $L(s,\chi)$ ist nach Satz 4.6 holomorph, also insbesondere stetig auf $H_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $L((1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)) := \{L(s,\chi) \mid s \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)\}$ in einer Kreisscheibe $K$ um $L(1,\chi)$ enthalten ist, für die $0 \notin K$ gilt. Es gibt einen Zweig des Logarithmus $\mathrm{Log}_1$, der stetig auf $K$ ist. Für $s \in (1,\ 1+\varepsilon)$ hat man außerdem

$$\exp(\log L(s,\chi)) = L(s,\chi)\,.$$

Daher ist $f(s) := \log L(s,\chi) - \mathrm{Log}_1(L(s,\chi)) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und $f$ ist stetig auf $(1,\ 1+\varepsilon)$, also gilt für alle $s \in (1,\ 1+\varepsilon)$

$$\log L(s,\chi) = \mathrm{Log}_1(L(s,\chi)) + 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. $\mathrm{Log}_1(L(s,\chi)) + 2\pi i k$ ist stetig auf $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ und somit wird durch

$$\log L(1,\chi) := \mathrm{Log}_1(L(1,\chi)) + 2\pi i k$$

$\log L(s,\chi)$ stetig auf $[1,\ \infty)$ fortgesetzt. □

Satz 4.8 liefert noch die folgende Aussage.

**Korollar 4.9.** *Für $s \in \mathbb{R}, s > 1$ gilt*

$$\prod_\chi L(s,\chi) \geq 1\,, \tag{14}$$

*wobei $\chi$ alle Dirichlet-Charaktere modulo $q$ durchläuft.*

**Beweis:** Sei $s \in \mathbb{R}, s > 1$. Man betrachte nun

$$\begin{aligned}\sum_\chi \log L(s,\chi) &= \sum_\chi \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks} = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_\chi \chi(p^k)\right)p^{-ks} \\ &= \varphi(q) \sum_p \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ p^k \equiv 1 \bmod q}} \frac{1}{k}p^{-ks} \geq 0\,,\end{aligned}$$

nach der Charakterrelation (4), beziehungsweise Lemma 3.7 mit $a = 1$, denn $\overline{\chi}(1) = 1$.
Es folgt

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = \exp\left(\sum_{\chi} \log L(s,\chi)\right) \geq 1\,,$$

was die Aussage beweist. □

Es bleibt noch zu zeigen, dass $L(1,\chi) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$ gilt.

**Lemma 4.10.** *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Dann folgt aus $L(1,\chi) = 0$, dass $\chi$ reellwertig ist.*

**Beweis:** Sei $\chi \neq \chi_0$ und $L(1,\chi) = 0$.
Dann gilt

$$0 = \overline{L(1,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi(n)n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n)n^{-1}\,,$$

also gilt auch $L(1,\overline{\chi}) = 0$.

Ist $\chi$ nicht reellwertig, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\chi(m) \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, also $\overline{\chi(m)} \neq \chi(m)$ und daher ist $\chi \neq \overline{\chi}$. Außerdem sind $L(s,\chi)$ und $L(s,\overline{\chi})$ holomorph auf $H_0 = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ nach Satz 4.6, da $\overline{\chi} \neq \chi_0$.
$L(s,\chi_0)$ ist meromorph fortsetzbar auf $H_0$ und hat einen Pol erster Ordnung in $s = 1$. Damit ist auch $L(s,\chi)L(s,\overline{\chi})L(s,\chi_0)$ holomorph fortsetzbar auf $H_0$ und hat eine Nullstelle mindestens erster Ordnung bei $s = 1$.

Also ist $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ fortsetzbar auf $H_0$ und hat eine Nullstelle für $s = 1$, insbesondere gibt es eine Kreisscheibe um $s = 1$, in der $\left|\prod_{\chi} L(s,\chi)\right| < \frac{1}{2}$ ist, was im Widerspruch zu $\prod_{\chi} L(s,\chi) \geq 1$ für alle $s \in \mathbb{R}, s > 1$ (Korollar 4.9) steht. $\chi$ muss also reellwertig sein. □

**Satz 4.11.** *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Dann gilt $L(1,\chi) \neq 0$.*

**Beweis:** Nach Lemma 4.10 brauchen nur reellwertige Dirichlet-Charaktere betrachtet zu werden. Sei also $\chi \neq \chi_0$ ein rellwertiger Dirichlet-Charakter mod $q$. Man betrachte nun die folgende Faltung arithmetische Funktionen

$$f := \varepsilon * \chi\,,$$

wobei $\varepsilon(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

*Schritt 1.*

Zuerst soll folgende Formel gezeigt werden

$$\sum_{n \leq N^2} f(n)n^{-1/2} = 2NL(1,\chi) + \mathcal{O}(1) \quad (N \to \infty)\,. \tag{15}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le N^2} f(n)n^{-1/2} &= \sum_{n\le N^2}\sum_{d|n}\chi(d)n^{-1/2} = \sum_{n\le N^2}\sum_{\substack{(d,k)\in\mathbb{N}^2\\ dk=n}}\chi(d)(dk)^{-1/2}\\
&= \sum_{\substack{(d,k)\in\mathbb{N}^2\\ dk\le N^2}}\chi(d)(dk)^{-1/2}\\
&= \sum_{\substack{(d,k)\in\mathbb{N}^2:\,dk\le N^2\\ d\le N}}\chi(d)(dk)^{-1/2} + \sum_{\substack{(d,k)\in\mathbb{N}^2:\,dk\le N^2\\ d> N}}\chi(d)(dk)^{-1/2}\\
&= \sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1/2}\sum_{k\le N^2/d}k^{-1/2} + \sum_{k<N}k^{-1/2}\sum_{N<d\le N^2/k}\chi(d)d^{-1/2},
\end{aligned} \tag{16}$$

indem man nach festem $d$ beziehungsweise $k$ umordnet.
Weiterhin gilt mit Abelscher partieller Summation (Lemma 2.3) und $\{t\} := t-[t]$, sowie $a_k := 1$ für alle $k\in\mathbb{N}$, $g(x) := x^{-\frac{1}{2}}$ für $n\in\mathbb{N}$ folgende Formel

$$\begin{aligned}
\sum_{k\le n} k^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k\le n} a_k g(k) = n\,n^{-1/2} + \frac{1}{2}\int_1^n [t]t^{-3/2}\mathrm{d}t\\
&= n^{1/2} + \frac{1}{2}\int_1^n t^{-1/2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^n \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t\\
&= n^{1/2} + \frac{1}{2}\Big[2t^{1/2}\Big]_1^n - \frac{1}{2}\int_1^n \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t\\
&= 2n^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}\int_1^n \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t\\
&= 2n^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}\left(\int_1^u \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t - \int_n^u \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Beachtet man

$$\int_1^\infty \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t \le \int_1^\infty t^{-3/2}\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty}\Big[-2t^{-1/2}\Big]_1^r = 2$$

und

$$\left|\frac{1}{2}\int_n^\infty \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2}\int_n^\infty t^{-3/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\Big[-2t^{-1/2}\Big]_n^r = n^{-1/2}\,,$$

so folgt mit $c := -1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty \{t\}t^{-3/2}\mathrm{d}t$ in (17) eingesetzt

$$\sum_{k\le n} k^{-1/2} = 2n^{1/2} + c + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \quad (n\to\infty)\,. \tag{18}$$

Dieser Ausdruck wird zuerst in die zweite Summe auf der rechten Seite von (16) eingesetzt und es ergibt sich mithilfe von (12)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k<N}k^{-1/2}\sum_{N<d\le N^2/k}\chi(d)d^{-1/2}\right| &\le \sum_{k\le N}k^{-1/2}\left|\sum_{N+1\le d\le N^2/k}\chi(d)d^{-1/2}\right|\\
&\le \sum_{k\le N}k^{-1/2}4qN^{-1/2}\\
&= (2N^{1/2} + c + \mathcal{O}(N^{-1/2}))4qN^{-1/2}\\
&= \mathcal{O}(1) \quad (N\to\infty)\,.
\end{aligned}$$

In (16) eingesetzt erhält man mit (18)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le N^2} f(n)n^{-1/2} &= \sum_{d\le N} \chi(d)d^{-1/2}(2Nd^{-1/2}+c+\mathcal{O}(N^{-1}d^{1/2}))+\mathcal{O}(1)\\
&= 2N\sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1}+c\sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1/2}+\mathcal{O}(\sum_{d\le N}N^{-1})+\mathcal{O}(1)\\
&= 2N\sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1}+c\sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1/2}+\mathcal{O}(1)\quad (N\to\infty)\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Summe in obigem Ausdruck konvergiert für $N\to\infty$ gegen $c\,L(\frac{1}{2},\chi)$ und bleibt somit beschränkt. Es gilt daher wieder mit (12)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le N^2} f(n)n^{-1/2} &= 2N\sum_{d\le N}\chi(d)d^{-1}+\mathcal{O}(1)\\
&= 2N\left(L(1,\chi)-\sum_{d=N+1}^{\infty}\chi(d)d^{-1}\right)+\mathcal{O}(1)\\
&= 2N\Big(L(1,\chi)-\mathcal{O}(N^{-1})\Big)+\mathcal{O}(1)\\
&= 2NL(1,\chi)+\mathcal{O}(1)\quad (N\to\infty)\,,
\end{aligned}$$

was (15) beweist.

*Schritt 2.*

Jetzt soll $f(n)\ge 0$ und $f(n^2)\ge 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gezeigt werden.
$f$ ist als Faltung multiplikativer Funktionen multiplikativ. Für Primzahlpotenzen $p^k$, $k\in\mathbb{N}$ erhält man für $p\nmid q$ unter Beachtung der Tatsache, dass $\chi(p)$ eine reelle Einheitswurzel ist, also $\chi(p)\in\{1,-1\}$ und, da $\chi$ vollständig multiplikativ ist,

$$f(p^k)=\sum_{d\mid p^k}\chi(d)=\sum_{l=0}^{k}\chi(p)^l=\begin{cases} k+1 & \text{falls } \chi(p)=1,\\ 1 & \text{falls } \chi(p)=-1 \text{ und } k\equiv 0 \bmod 2,\\ 0 & \text{falls } \chi(p)=-1 \text{ und } k\equiv 1 \bmod 2.\end{cases}$$

Für $p\mid q$ hat man $f(p^k)=\sum_{l=0}^{k}\chi(p^l)=1$.
Also gilt für $n\in\mathbb{N}$, $n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{k_i}$

$$f(n)=f\left(\prod_{i=1}^{m}p_i^{k_i}\right)=\prod_{i=1}^{m}f\left(p_i^{k_i}\right)\ge 0$$

und

$$f(n^2)=f\left(\prod_{i=1}^{m}p_i^{2k_i}\right)=\prod_{i=1}^{m}f\left(p_i^{2k_i}\right)\ge 1\,,$$

was die Aussage beweist.

*Schritt 3.*

Nun wird die Aussage des Satzes bewiesen.
Es gilt nach Schritt 2

$$\sum_{n\le N^2} f(n)n^{-1/2} \ge \sum_{m\le N} f(m^2)m^{-1} \ge \sum_{m\le N} m^{-1}\,,$$

und die rechte Seite strebt gegen $\infty$ für $N \to \infty$.
Betrachtet man nun Formel (15) aus Schritt 1

$$\sum_{n\le N^2} f(n)n^{-1/2} = 2NL(1,\chi) + \mathcal{O}(1) \quad (N \to \infty)\,,$$

so strebt für $N \to \infty$ die linke Seite gegen $\infty$, also muss auch die rechte Seite gegen $\infty$ streben, was nur dann der Fall ist, wenn $L(1,\chi) > 0$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen. □

## 4.3 Der Dirichletsche Primzahlsatz

Der Dirichletsche Primzahlsatz kann jetzt aus Satz 4.11 gefolgert werden.

**Satz 4.12** (Dirichletscher Primzahlsatz)**.** *Seien $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a,q) = 1$. Dann gilt*

$$\sum_{p\equiv a \bmod q} \frac{1}{p} = \infty\,.$$

*Insbesondere gibt es unendlich viele Primzahlen $p$ mit $p \equiv a \bmod q$.*

**Beweis:** Sei $\chi$ ein Dirichlet-Charakter modulo $q$. Man hat mit (13) für $s \in (1,\infty)$

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks} = \sum_p \chi(p)p^{-s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\,. \tag{19}$$

Für die zweite Summe auf der rechten Seite gilt

$$\begin{aligned}\left|\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\chi(p^k)p^{-ks}\right| &\le \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} p^{-ks} \le \sum_p p^{-2s} \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-s})^k = \sum_p \frac{p^{-2s}}{1-p^{-s}} \\ &\le \sum_p \frac{p^{-2}}{1-2^{-1}} = 2\sum_p p^{-2} \le 2\,\zeta(2) = \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\end{aligned}$$

In (19) eingesetzt erhält man

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \chi(p)p^{-s} + \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,. \tag{20}$$

Sei nun $\chi \neq \chi_0$. Nach Satz 4.8 ist $\log L(s,\chi)$ stetig auf $[1, \infty)$, da nach Satz 4.11 $L(1,\chi) \neq 0$, also gilt

$$\sum_p \chi(p)p^{-s} = \log L(s,\chi) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,.$$

Für $a, q \in \mathbb{N}$, $(a,q) = 1$ folgt mit der Charakterrelation (8) aus Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
\sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-s} &= \sum_p \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \overline{\chi}(a)\chi(p)p^{-s} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \overline{\chi}(a) \sum_p \chi(p)p^{-s} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \nmid q} p^{-s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \sum_p \chi(p)p^{-s} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \nmid q} p^{-s} + \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit (20)

$$\sum_{p \nmid q} p^{-s} = \log L(s,\chi_0) + \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,. \qquad (22)$$

$L(s,\chi_0)$ nimmt für $s \in \mathbb{R}, s > 1$ positive, reelle Werte an und liegt damit im Definitionsbereich des Hauptzweigs des Logarithmus, der mit Log bezeichnet werde und es gilt für $s \in (1, \infty)$

$$L(s,\chi_0) = \exp\left(\log L(s,\chi_0)\right) = \exp\left(\operatorname{Log}\left(L(s,\chi_0)\right)\right)\,.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Log}(L(s,\chi_0)) - \log L(s,\chi_0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

und aus Stetigkeitsgründen gilt dann

$$\log L(s,\chi_0) = \operatorname{Log}(L(s,\chi_0)) + 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Dies führt mit (11) zu

$$\begin{aligned}
\log L(s,\chi_0) &= \operatorname{Log}\left(\prod_{p|q}\left(1 - p^{-s}\right)\right) + \operatorname{Log}\left(\zeta(s)\right) + 2\pi i k \\
&= \operatorname{Log}\left(\zeta(s)\right) + \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,.
\end{aligned}$$

Aus Satz 4.3 folgert man sofort, dass $\zeta(s)$ und damit auch $\operatorname{Log}(\zeta(s))$ für $(s \searrow 1)$ gegen $\infty$ strebt, also strebt auch $\log L(s,\chi_0)$ gegen $\infty$ für $(s \searrow 1)$.
Nach Formel (22) ist somit $\lim_{s\searrow 1} \sum_{p \nmid q} p^{-s} = \infty$ und wegen (21) ist dann

$$\lim_{s \searrow 1} \sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-s} = \infty\,. \qquad (23)$$

Wäre $\sum_{p\equiv a \bmod q} p^{-1} < \infty$, so hätte man

$$0 \leq \sum_{p\equiv a \bmod q} p^{-s} \leq \sum_{p\equiv a \bmod q} p^{-1} < \infty$$

für alle $s \in [1, \infty)$, was im Widerspruch zu (23) steht.
Zusammenfassend erhält man

$$\sum_{p\equiv a \bmod q} \frac{1}{p} = \infty\,,$$

was den Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes abschließt. □

Es kann noch untersucht werden, wie sich die Primzahlen auf die primen Restklassen modulo $q$ aufteilen, wobei $q$ eine natürliche Zahl ist. Dabei gibt es zwei Dichtebegriffe.

**Definition 4.13.** *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Primzahlen. Dann ist die* Dirichlet-Dichte *von $\mathcal{P}$ definiert als*

$$d(\mathcal{P}) := \lim_{s\searrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s}}{\sum_p p^{-s}}\,,$$

*sofern der Limes existiert.*

*Die natürliche Dichte von $\mathcal{P}$ wird durch*

$$\delta(\mathcal{P}) := \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{p \in \mathcal{P} \mid p \leq x\}}{\#\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl},\ p \leq x\}}$$

*definiert, sofern der Grenzwert existiert.*

**Satz 4.14.** *Existiert die natürliche Dichte einer Menge von Primzahlen $\mathcal{P}$, so existiert auch deren Dirichlet-Dichte und es gilt*

$$d(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}).$$

**Beweis:** [St, Bemerkung 11.34]. □

**Bemerkung.** Die Umkehrung von Satz 4.14 ist im Allgemeinen falsch, siehe [S, chapter VI, 4.5].

Der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes liefert nun folgenden Satz.

**Satz 4.15.** *Seien $a, q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$. Die Dirichlet-Dichte der Menge $\mathcal{P}_{a,q}$ aller Primzahlen kongruent zu $a$ modulo $q$ ist $\frac{1}{\varphi(q)}$.*

**Beweis:** Nach Formel (21) aus dem Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes gilt

$$\begin{aligned}\sum_{p\equiv a \bmod q} p^{-s} &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p\nmid q} p^{-s} + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{\varphi(q)} \left( \sum_p p^{-s} - \sum_{p\mid q} p^{-s} \right) + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_p p^{-s} + \mathcal{O}(1) \quad (s \searrow 1)\,,\end{aligned}$$

also hat man

$$d(\mathcal{P}_{a,q}) = \lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-s}}{\sum_p p^{-s}} = \frac{1}{\varphi(q)}\,,$$

da $\sum_p p^{-s}$ für $s \searrow 1$ gegen $\infty$ strebt. $\square$

Es ist schwieriger die natürliche Dichte der Menge aller Primzahlen kongruent zu $a$ modulo $q$ für teilerfremde natürliche Zahlen $a$ und $q$ zu bestimmen. Dies kann zum Beispiel mithilfe des Primzahlsatzes in arithmetischen Progressionen geschehen, der sowohl den Primzahlsatz als auch den Dirichletschen Primzahlsatz beinhaltet.

**Satz 4.16** (Primzahlsatz in arithmetischen Progressionen)**.** *Seien $a, q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$.*
*Dann gilt für $\pi(x, a, q) := \#\{p \in \mathbb{N} \mid p\, Primzahl,\ p \leq x\ und p \equiv a\ mod q\}$*

$$\pi(x, a, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{log(x)} (1 + o(1)) \quad (x \to \infty).$$

**Beweis:** [W, Satz 7.3]. $\square$

**Korollar 4.17.** *Seien $a, q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$. Die natürliche Dichte der Menge $\mathcal{P}_{a,q}$ aller Primzahlen kongruent zu a modulo q ist $\frac{1}{\varphi(q)}$.*

**Beweis:** Dies folgt direkt aus Satz 4.16. Für $x \geq 2$ hat man

$$\begin{aligned} \frac{\#\{p \in \mathcal{P}_{a,q} \mid p \leq x\}}{\#\{p \in \mathbb{N} \mid p\,\text{Primzahl},\ p \leq x\}} &= \frac{\pi(x, a, q)}{\pi(x, 1, 2) + 1} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1) + \frac{log(x)}{x}} \quad (x \to \infty)\,, \end{aligned}$$

also gilt

$$\delta(\mathcal{P}_{a,q}) = \frac{1}{\varphi(q)}\,,$$

was die Aussage beweist. $\square$

## Literatur


[B] Jörg Brüdern
*Einführung in die analytische Zahlentheorie*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995

[F] Otto Forster
*Die Riemannsche Zetafunktion*
*Vorlesung im WS 2008/09 an der LMU München*
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/vorlA8w_zet.html
(abgerufen am 16. Dezember 2010)

[FB] Eberhard Freitag und Rolf Busam
*Funktionentheorie 1*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

[MP] Stefan Müller-Stach und Jens Piontkowski
*Elementare und algebraische Zahlentheorie*
Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden 2011

[S] Jean-Pierre Serre
*A Course in Arithmetic*
Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg 1973

[St] Michael Stoll
*Diophantische Gleichungen*
*Vorlesung im WS 2008/09 an der Universität Bayreuth*
http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/teaching/Dioph/Skript.pdf
(abgerufen am 29. Mai 2012)

[T] Heinrich Tietze
*Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit*
C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München 1965

[W] Dieter Wolke
*Analytische Zahlentheorie*
*Vorlesung im WS 2001/02 an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg*
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/wolke/MS_AN_ZT/VS.pdf
(abgerufen am 29. Mai 2012)

# Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfe anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe.

Mainz, den 3. Juni 2012