

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Mathematik
Fachbereich 08

Spiral-CT Algorithmus von Katsevich

Bachelorarbeit von Andrey Tyukin

Matrikelnummer: 2646144
Betreuer: Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois
Abgabetermin: 03.01.2011

Abstract

Das Thema dieser Bachelorarbeit ist ein Algorithmus für Spiral-Computertomographie, der von Alexander Katsevich entwickelt und im Jahre 2002 veröffentlicht wurde. Zunächst werden die notwendigen Begriffe aus dem Bereich der Computertomographie eingeführt und einige vorbereitende Lemmata bewiesen, anschließend wird ein Beweis für die Korrektheit der Inversionsformel präsentiert. Dabei handelt es sich im wesentlichen um den ursprünglichen Beweis von Katsevich, der durch einige zusätzliche Skizzen und ausführlichere Rechnungen ergänzt wurde.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbereitung	3
2.1	Notation und Voraussetzungen	3
2.2	Problemstellung	4
2.3	PI-Strecken	6
3	Algorithmus von Katsevich	9
3.1	Inversionsformel	9
3.2	Wahl der Filterungslinien	12
3.3	Aufwand und Anforderungen an den Detektor	24
4	Anhang	27
5	Selbstständigkeitserklärung	33

Bezeichnungen

e_1, \dots, e_n	kanonische Basisvektoren von \mathbb{R}^n
$ \alpha $	Betrag von Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ x\ $	euklidische Norm von Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$
$x \cdot y$	Skalarprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$
$x \times y$	Kreuzprodukt von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$
$\text{conv } A$	konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$
$\text{span } A$	lineare Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$
$\overset{\circ}{A}$	offener Kern von $A \subset \mathbb{R}^n$
\bar{A}	Abschluss von $A \subset \mathbb{R}^n$
$B_r^d(x)$	d -dimensionale offene Kugel um x mit Radius r
S^{n-1}	$(n-1)$ -Sphäre eingebettet in \mathbb{R}^n
$\text{supp } f$	Träger einer Funktion f
$A \subset\subset B$	$A \subset B$, A ist kompakt und liegt in B
f'	Ableitung einer reellwertigen Funktion f nach einem Parameter
\dot{a}, \ddot{a}	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren für Wege
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partielle Ableitung einer skalarwertigen Funktion f nach x
D^α	Ableitungssymbol mit Multiindex α
∇	Gradient/Divergenz
\mathcal{F}	Fouriertransformation
\mathcal{F}^{-1}	inverse Fouriertransformation
FFT	schnelle diskrete Fouriertransformation
$\mathcal{O}(f)$	Landau-Symbol
\mathcal{S}	Schwartzraum
\mathcal{S}'	Raum der temperierten Distributionen
$C^\infty(U)$	Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $U \subset \mathbb{R}^n$
δ	Deltadistribution
\mathcal{D}	Cone-Beam-Transformation (vgl. (2.12))
\mathcal{H}	Hilberttransformation (vgl. (3.4))
$\mathcal{D}^\#$	Rückprojektionsoperator (vgl. (3.5))

1 Einleitung

Computertomographie ist ein bildgebendes Verfahren, das vor allem in der Medizin und bei der zerstörungsfreien Qualitätssicherung in der Industrie eine wichtige Rolle spielt. Die Aufgabe der Computertomographie besteht darin, aus mehreren Röntgenaufnahmen eines Objektes den *Absorptionsgrad* (eine Art skalare Dichte) im Inneren des Objektes zu rekonstruieren. Dafür wird das untersuchte Objekt aus verschiedenen Richtungen von Röntgenstrahlen durchleuchtet. Aus den Messungen der Abschwächung der einzelnen Strahlen wird anschließend unter hohem Rechenaufwand der Absorptionsgrad rekonstruiert. Röntgenstrahlen sind für solche Verfahren besonders geeignet, weil sie viele Stoffe (etwa Gewebe eines Patienten) gradlinig durchlaufen, ohne gestreut oder abgelenkt zu werden. Dies macht die Modellierung und die Berechnungen vergleichsweise einfach.

Weit verbreitet sind die so genannten *Spiral-Computertomographen*. Bei diesem Typ von Tomographen bewegt sich eine Röntgenquelle auf einer *zylindrischen Spirale* um das untersuchte Objekt (siehe Abbildung 1.1). Bei den medizinischen Anwendungen wird es realisiert, indem die Röntgenquelle zusammen mit dem gegenüberliegenden zweidimensionalen Detektor in einer Ebene rotiert, während der Patient auf einer Liege mit konstanter Geschwindigkeit durch diese Ebene geschoben wird. Diese geometrische Anordnung hat viele Vorteile. Zum

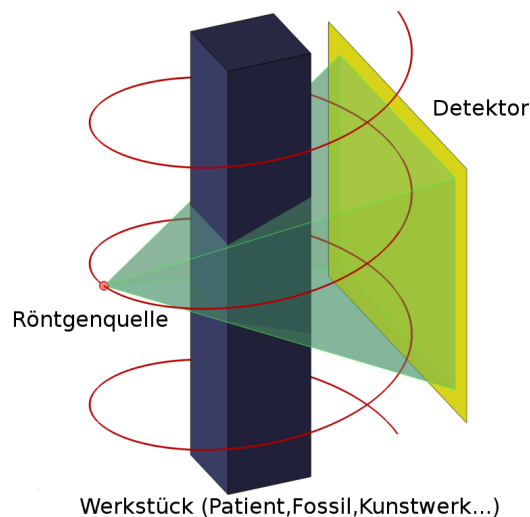


Abb. 1.1: Spiral-Computertomographie

einen kann mit dem zweidimensionalen Detektor die gesamte Strahlung ausgenutzt werden, dadurch hält sich die Strahlenexposition in Grenzen. Zum anderen ist der Scanvorgang ziemlich schnell, dies ist wichtig, um *Bewegungsartefakte* zu vermeiden, die dadurch verursacht werden, dass beispielsweise Lunge oder Herz ihre Form während der Messung verändern. Außerdem kommt das Gerät mit einem relativ kleinen Detektor aus, dadurch bleiben die

1 Einleitung

Herstellungskosten relativ gering.

In den 1990er und am Anfang dieses Jahrhunderts musste man sich bei der Spiral-Computertomographie noch mit Algorithmen begnügen, die entweder nicht theoretisch exakt, oder vergleichsweise langsam waren. Im Jahre 2002 stellte dann Alexander Katsevich einen Algorithmus vor, der genau auf die weit verbreiteten Spiral-Computertomographen zugeschnitten war, theoretisch exaktes Ergebnis lieferte und dazu schnelle Implementierung ermöglichte [Kat2]. Inzwischen hat Katsevich diesen Algorithmus für wesentlich allgemeinere Kurven formuliert [KatKap], in dieser Arbeit werden wir uns aber mit der ursprünglichen Variante des Algorithmus für Spiralen befassen. Dazu werden wir im nächsten Kapitel die Notation einführen, das Problem formalisieren sowie ein vorbereitendes Lemma beweisen, welches schon in früheren Arbeiten über Spiral-CT eine Rolle spielte, und beispielsweise in [DNK] zu finden ist. Im darauffolgenden Kapitel werden wir dann den eigentlichen Algorithmus von Katsevich vorstellen und in mehreren Schritten beweisen. Der Beweis ist in zwei unabhängige Abschnitte unterteilt, im ersten Teil kommen Werkzeuge aus der Analysis zum Einsatz, der zweite Teil basiert dagegen auf elementargeometrischen Argumenten. Obwohl wir im wesentlichen dem ursprünglichen Beweis von Katsevich [Kat2] folgen, ist die Notation eher an später entstandene Schriften von Zhao, Yu und Wang ([ZYW, II.B]) angelehnt.

2 Vorbereitung

2.1 Notation und Voraussetzungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst auf eine einheitliche Notation festlegen, sowie an einige nützliche Sätze erinnern. Dieser Abschnitt beinhaltet noch keine für die Computertomographie spezifischen Definitionen.

Bei dem Beweis werden wir von der *Fouriertransformation* und ihrer Inversen Gebrauch machen. Auf dem Raum der *schnell fallenden Funktionen*, dem so genannten *Schwartzraum*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^m) \|(D^\alpha f)(x)\| < \infty \right\}$$

ist die Fouriertransformation und ihre Inverse gegeben durch

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx \quad (2.1)$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Auf dem Schwartzraum sind diese beiden Abbildungen stetig, linear und bijektiv. Den Beweis hierfür kann man in jedem Buch über Funktionalanalysis nachschlagen, etwa in [Wr, V.2.8] oder [Wl, 11 IV].

Auf dem Raum der *temperierten Distributionen* \mathcal{S}' , also dem Raum der stetigen linearen Funktionale ist die Fouriertransformation durch

$$(\mathcal{F}A, \phi) := (A, \mathcal{F}\phi) \quad \text{für } A \in \mathcal{S}', \phi \in \mathcal{S}$$

definiert. Führt man in \mathcal{S}' den Konvergenzbegriff durch

$$A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \quad \Leftrightarrow \quad (A_k, \phi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (A, \phi) \quad \text{für jedes } \phi \in \mathcal{S}$$

ein, dann lässt sich zeigen, dass die Fouriertransformation auch auf \mathcal{S}' stetig, linear und bijektiv ist ([Wl, 11 IX]).

Eine Distribution ist für den Beweis besonders wichtig: die um x_0 verschobene *Deltadistribution* ist definiert durch:

$$(\delta_{x_0}, \psi) \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \psi(x) dx := \psi(x_0) \quad \text{für } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Wir werden stets die Integralschreibweise verwenden, um auch bei mehreren Variablen Überblick zu behalten. Ist $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen

2 Vorbereitung

im Inneren des Intervalls I (das heißt $g'(\nu) \neq 0$ für alle $\nu \in \overset{\circ}{I} \cap g^{-1}(\{0\})$), dann ist die Verkettung der Deltadistribution mit g wie folgt zu verstehen:

$$\delta \circ g = \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \frac{\delta_\nu}{|g'(\nu)|}. \quad (2.4)$$

Für nirgends verschwindende stetig differenzierbare Funktionen f gilt außerdem:

$$\delta \circ (f \cdot g) = \frac{1}{|f|} \cdot (\delta \circ g). \quad (2.5)$$

Für eine Begründung dieser Definitionen siehe [GS][II.§2.5.] oder die Rechnung 4.0.1 im Anhang. Wir werden die Fouriertransformierten von einigen Distributionen benötigen:

$$(\mathcal{F}\delta_{x_0})(\xi) = e^{-ix_0\xi} \quad (\mathcal{F}\mathbf{1})(\xi) = 2\pi\delta \quad (2.6)$$

Diese beiden Identitäten ermöglichen es, folgendes Integral als Distribution aufzufassen:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} dx = 2\pi\delta(t), \quad (2.7)$$

siehe dazu [GS][I §2 Bsp. 3]. Für die Signumfunktion

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

gibt es einen ähnlichen Ausdruck, der als Cauchy-Hauptwert-Integral mit Pol bei 0 zu verstehen ist:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{x} dx = -i\pi \operatorname{sgn}(t). \quad (2.9)$$

Dieses Integral tritt im Zusammenhang mit dem *Dirichlet-Integral* auf, siehe dazu [FB, Ende von III.4] und 4.0.2 im Anhang.

2.2 Problemstellung

In diesem Abschnitt formalisieren wir die Problemstellung. Wir beginnen mit der Beschreibung der Geometrie.

Mit a bezeichnen wir den Weg der Röntgenquelle. Seine Gestalt wird durch den Radius R und den Abstand der Windungen h bestimmt. Die Spirale bezeichnen wir mit Γ :

$$a(t) := \left[R \cos(t), R \sin(t), \frac{h}{2\pi} t \right]^T, \quad \Gamma := a(\mathbb{R}). \quad (2.10)$$

Den Absorptionskoeffizienten des untersuchten Objektes modellieren wir als Dichte f . Wir nehmen f als unendlich oft differenzierbar an. Der Träger von f soll kompakt im offenen Zylinder Ω liegen. Der Radius r von Ω soll dabei echt kleiner als R sein:

$$f \in C^\infty(\Omega), \operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega, \quad (2.11)$$

$$\Omega := B_r^2(0) \times \mathbb{R} = \left\{ [x, y, z]^T \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r < R \right\}.$$

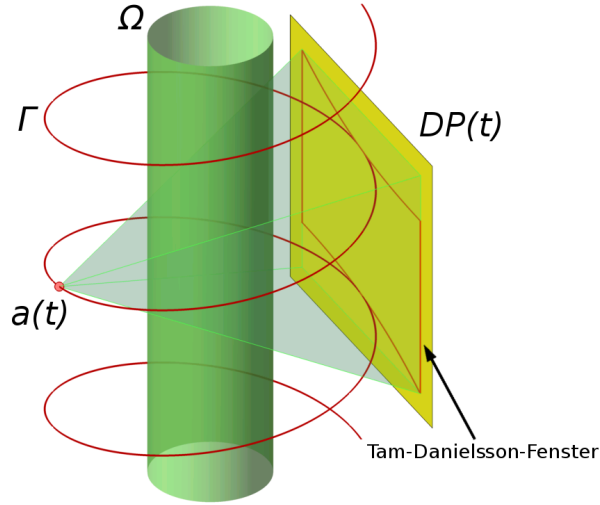


Abb. 2.1: Bezeichnungen der geometrischen Objekte

Für Ebenen durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ verwenden wir im Folgenden die Notation:

$$\Pi(x, \xi) := \{z \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \cdot z = \xi \cdot x\}.$$

Der Detektor wird zunächst als unendlich große Detektorebene $DP(t)$ modelliert, die zusammen mit der Quelle rotiert:

$$DP(t) := \Pi \left(\left[-R \cos(t), -R \sin(t), \frac{h}{2\pi} t \right]^T, [-\cos(t), -\sin(t), 0]^T \right)$$

In der Abbildung 2.1 ist ein rechteckiger Ausschnitt dieser Ebene dargestellt. Was wie ein von der Spirale Γ und dem Zylinder Ω auf die Detektorebene geworfener Schatten aussieht, sind die Umrisse des so genannten *Tam-Danielsson-Fensters*. Dies ist die theoretisch minimale Fläche, die für eine exakte Rekonstruktion ausreicht. Das Tam-Danielsson-Fenster wird später beim Beweis eine wesentliche Rolle spielen.

Die Abschwächung eines Röntgenstrahls auf seinem Weg durch das untersuchte Objekt können wir durch das Integral von f entlang eines Strahls ausdrücken. Wir legen Strahlen durch ihren Start- und Richtungsvektor fest, und definieren:

2.2.1 Definition (Cone-Beam-Transformation):

$$(\mathcal{D}f) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathcal{D}f)(z, \theta) := \int_0^\infty f(z + r\theta) dr. \quad (2.12)$$

Der Scanvorgang liefert die Messwerte $(\mathcal{D}f)(z, \theta)$ für $z \in \Gamma$ und alle relevanten $\theta \in \mathbb{S}^2$. Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus $(\mathcal{D}f)$ die unbekannte Dichte f zu rekonstruieren.

2.3 PI-Strecken

In diesem Abschnitt beweisen wir ein Lemma, das wir für die Formulierung der Inversionsformel im nächsten Kapitel benötigen werden.

2.3.1 Definition (PI-Strecken und -Intervalle): Sei $x \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt innerhalb der Spirale, das heißt $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R$. Sind $t_{bot}(x), t_{top}(x) \in \mathbb{R}$, $t_{top}(x) - t_{bot}(x) \in (0, 2\pi)$ zwei Parameter, für die der Punkt x auf der Verbindungsstrecke zwischen $a(t_{bot}(x))$ und $a(t_{top}(x))$ liegt, dann bezeichnen wir:

$$I_{PI}(x) := [t_{bot}(x), t_{top}(x)] \quad \text{als PI-Intervall,} \quad (2.13)$$

$$L_{PI}(x) := \text{conv}\{a(t_{bot}(x)), a(t_{top}(x))\} \quad \text{als PI-Strecke und} \quad (2.14)$$

$$C_{PI}(x) := a(I_{PI}(x)) \quad \text{als PI-Bogen zum Punkt } x. \quad (2.15)$$

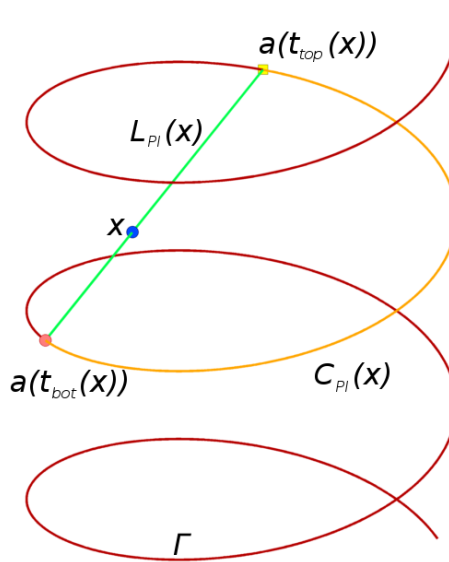


Abb. 2.2: PI-Strecke und PI-Bogen

Wir haben bei der Definition $t_{bot}(x)$ und $t_{top}(x)$ als Funktionen behandelt, doch zunächst ist die Wohldefiniertheit nicht offensichtlich, wir müssen also zeigen, dass $t_{bot}(x)$ und $t_{top}(x)$ existieren und eindeutig bestimmt sind.

2.3.2 Lemma (Existenz und Eindeutigkeit von PI-Intervallen): Jeder Punkt innerhalb der Spirale gehört zu genau einer Strecke, deren Endpunkte auf der Spirale liegen und voneinander weniger als eine Windung entfernt sind, genauer: zu jedem Punkt x mit $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R$ existieren eindeutig bestimmte Parameter $t_{top}, t_{bot} \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, 1)$ mit $t_{top} - t_{bot} \in (0, 2\pi)$, welche

$$x = \lambda a(t_{bot}) + (1 - \lambda)a(t_{top}) \quad (2.16)$$

erfüllen. Die Lage der Endpunkte wird durch t_{top} und t_{bot} bestimmt, der Parameter λ legt die Position des Punktes x auf der Verbindungsstrecke $L_{PI}(x)$ fest.

Beweis: Der Punkt x sei im Folgenden beliebig aber fest. Wir stellen x zunächst in Zylinderkoordinaten dar: $x = [\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z_0]^T$ mit $\rho \in [0, R)$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Ausgeschrieben ergibt (2.16) folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\rho \cos(\phi) &= \lambda R \cos(t_{bot}) + (1 - \lambda)R \cos(t_{top}) \\ \rho \sin(\phi) &= \lambda R \sin(t_{bot}) + (1 - \lambda)R \sin(t_{top}) \\ z_0 &= \lambda \frac{h}{2\pi} t_{bot} + (1 - \lambda) \frac{h}{2\pi} t_{top}\end{aligned}\tag{2.17}$$

Um dieses Gleichungssystem nach t_{top} , t_{bot} und λ aufzulösen, lassen wir zunächst t_{bot} variabel, und lösen die ersten beiden Gleichungen nach den anderen beiden Unbekannten auf. Die geometrische Bedeutung der ersten beiden Gleichungen ist sehr simpel: wir suchen den Schnittpunkt $\tilde{a}(t_{top})$ von einem Kreis mit einer Geraden, wobei der andere Schnittpunkt $\tilde{a}(t_{bot})$, sowie ein Punkt \tilde{x} im Inneren des Kreises vorgegeben sind (siehe Abbildung 2.3). Mit \tilde{p} bezeichnen wir hier die Projektion eines Punktes p auf die e_1 - e_2 -Ebene.

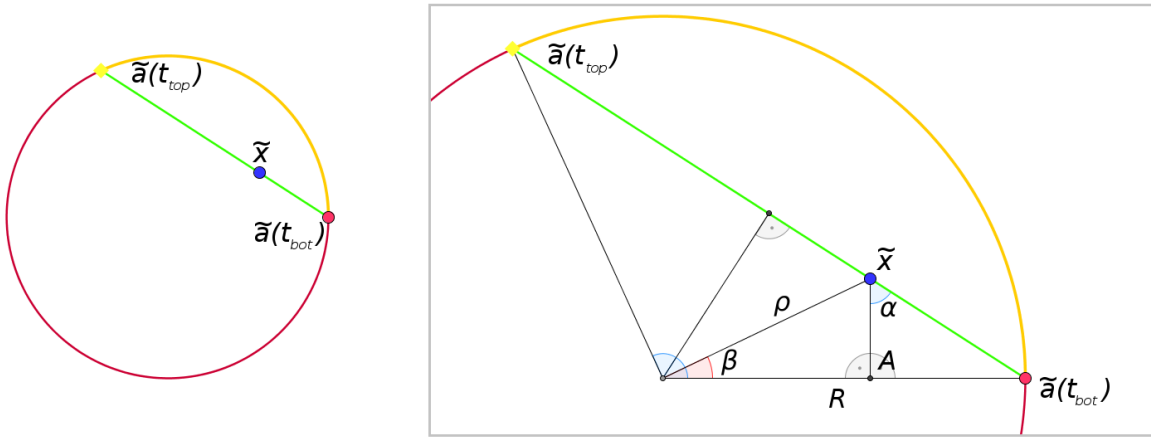


Abb. 2.3: Geometrische Bedeutung der ersten beiden Gleichungen. Für $t_{top} - t_{bot} > \pi$ würde die Skizze gespiegelt aussehen, und α wäre dann als $(2\pi - t_{top} + t_{bot})/2$ zu interpretieren.

Eine Lösung existiert, und ist offensichtlich eindeutig. An der Skizze 2.3 können wir mit Hilfe des Kosinussatzes direkt den Winkel $\alpha := \frac{t_{top} - t_{bot}}{2}$ ablesen:

$$\cos\left(\frac{t_{top} - t_{bot}}{2}\right) = \cos(\alpha) = \frac{\|\tilde{x} - A\|}{\|\tilde{x} - \tilde{a}(t_{bot})\|} = \frac{\rho \sin(\phi - t_{bot})}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\phi - t_{bot})}},$$

daraus erhalten wir unmittelbar:

$$t_{top}(t_{bot}) = t_{bot} + 2 \arccos\left(\frac{\rho \sin(\phi - t_{bot})}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\phi - t_{bot})}}\right).\tag{2.18}$$

2 Vorbereitung

Um λ zu berechnen, bietet es sich an, jeweils den von t_{bot} abhängigen Summanden auf die linke Seite der Gleichung zu verschieben, die beiden Gleichungen zu quadrieren und aufzuaddieren. Dies führt dazu, dass fast alle trigonometrischen Terme wegfallen, übrig bleibt:

$$\rho^2 - 2\lambda\rho R(\cos(\phi)\cos(t_{bot}) + \sin(\phi)\sin(t_{bot})) + \lambda^2 R^2 = (1 - \lambda)^2 R^2. \quad (2.19)$$

Bemerke, dass sich die restlichen trigonometrischen Terme wegen des Additionstheorems $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\beta - \alpha)$ zu $\cos(\phi - t_{bot})$ vereinfachen lassen. Aufgelöst nach λ ergibt dies:

$$\lambda(t_{bot}) = \frac{R^2 - \rho^2}{2R(R - \rho\cos(\phi - t_{bot}))}. \quad (2.20)$$

Bemerke, dass wegen $\rho < R$ der Nenner stets positiv bleibt, und dass sowohl λ als auch t_{top} stetig differenzierbar von t_{bot} abhängen.

Die rechte Seite der dritten Gleichung aus (2.17) ist nun ebenfalls eindeutig durch t_{bot} festgelegt, wir bezeichnen diesen Wert mit z :

$$z(t_{bot}) := \frac{h}{2\pi}(\lambda(t_{bot})t_{bot} + (1 - \lambda(t_{bot}))t_{top}(t_{bot})). \quad (2.21)$$

Ab jetzt werden wir den Parameter t_{bot} nicht mehr explizit hinschreiben. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion z genau ein Mal den Wert z_0 annimmt. Die Existenz mindestens einer Lösung ist klar wegen des asymptotischen Verhaltens von z , es gilt nämlich:

$$\lim_{t_{bot} \rightarrow -\infty} z(t_{bot}) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t_{bot} \rightarrow +\infty} z(t_{bot}) = \infty,$$

daher muss z als stetige Funktion mindestens ein Mal den Zwischenwert z_0 annehmen. Nun berechnen wir die Ableitung von z nach t_{bot} :

$$\frac{\partial z}{\partial t_{bot}} = \frac{h}{2\pi} \left((t_{bot} - t_{top}) \frac{\partial \lambda}{\partial t_{bot}} + \lambda + (1 - \lambda) \frac{\partial t_{top}}{\partial t_{bot}} \right). \quad (2.22)$$

Die partiellen Ableitungen erhalten wir als Lösung des linearen Gleichungssystems, welches bei der Differentiation der ersten beiden Gleichungen aus (2.17) nach t_{bot} entsteht:

$$\begin{bmatrix} R(\cos(t_{bot}) - \cos(t_{top})) & R(\lambda - 1)\sin(t_{top}) \\ R(\sin(t_{bot}) - \sin(t_{top})) & R(1 - \lambda)\cos(t_{top}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial t_{bot}} \\ \frac{\partial t_{top}}{\partial t_{bot}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\lambda\sin(t_{bot}) \\ -R\lambda\cos(t_{bot}) \end{bmatrix},$$

aufgelöst ergibt dies:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial t_{bot}} \\ \frac{\partial t_{top}}{\partial t_{bot}} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \lambda)(\cos(t_{top} - t_{bot}) - 1)} \begin{bmatrix} (\lambda - 1)\lambda\sin(t_{top} - t_{bot}) \\ \lambda(\cos(t_{top} - t_{bot}) - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cot\left(\frac{t_{top} - t_{bot}}{2}\right) \\ \frac{\lambda}{1 - \lambda} \end{bmatrix}.$$

Nun setzen wir das in (2.22) ein und erhalten:

$$\frac{\partial z}{\partial t_{bot}} = \frac{h\lambda}{\pi} \left(1 - \frac{t_{top} - t_{bot}}{2} \cot\left(\frac{t_{top} - t_{bot}}{2}\right) \right) > 0.$$

Die letzte Ungleichung ist im Anhang (4.2) gezeigt. Also ist z strikt monoton steigend, und nimmt den Wert z_0 genau ein Mal an, womit der Beweis des Lemmas beendet ist. \blacksquare

3 Algorithmus von Katsevich

3.1 Inversionsformel

In diesem Kapitel formulieren wir die Inversionsformel, mit deren Hilfe die ursprüngliche Funktion f aus den Messdaten $\mathcal{D}f$ rekonstruiert werden kann. Dazu definieren wir zunächst die benötigten Operatoren. Wir fangen mit zwei Operatoren an, deren Anwendung als *Filterung* bezeichnet wird.

3.1.1 Definition (Ableitungsoperator): Sei $g : \Gamma \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren den Ableitungsoperator ∂ durch:

$$\partial g : \Gamma \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\partial g)(a(t), \theta) := \left. \frac{\partial}{\partial q} g(a(q), \theta) \right|_{q=t}. \quad (3.1)$$

Bemerke, dass nur nach der ersten Komponente abgeleitet wird, auch wenn anstelle von θ Funktionen eingesetzt werden, die ebenfalls von t abhängen.

Den nächsten Operator parametrisieren wir durch eine Abbildung $\beta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, welche jeder Richtung $\alpha \in \mathbb{S}^2$ eine dazu orthogonale Richtung $\beta(\alpha)$ zuordnet. Wie diese Abbildung sinnvoll zu wählen ist, werden wir erst im nächsten Abschnitt diskutieren. Für jedes α bilden $\{\alpha, \beta(\alpha)\}$ eine orthonormale Basis der Ebene $\text{span}\{\alpha, \beta(\alpha)\}$. Wir parametrisieren in dieser Ebene liegenden Einheitskreis durch

$$\Theta^\beta(\alpha, \gamma) := \cos(\gamma)\alpha + \sin(\gamma)\beta(\alpha) \quad \text{für } \gamma \in [0, 2\pi). \quad (3.2)$$

An dieser Stelle führen wir zwei nützliche Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \alpha_x(t) &:= \frac{x - a(t)}{\|x - a(t)\|} \\ \beta_x(t) &:= \beta(\alpha_x(t)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

das heißt, α_x ist der normierte Vektor, der immer in Richtung von x zeigt (siehe Abbildung 3.1), und β_x ein dazu orthogonaler Vektor.

Diese Bezeichnungen verwenden wir allen nachfolgenden Definitionen.

3.1.2 Definition (Hilberttransformation): Für $g : \Gamma \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Hilberttransformierte $\mathcal{H}^\beta g$ durch:

$$(\mathcal{H}^\beta g) : \Gamma \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathcal{H}^\beta g)(a(t), \alpha) := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(a(t), \Theta^\beta(\alpha, \gamma)) \frac{d\gamma}{\sin(\gamma)}, \quad (3.4)$$

wobei das Integral im Sinne des Hauptwertes nach Cauchy zu verstehen ist.

3 Algorithmus von Katsevich

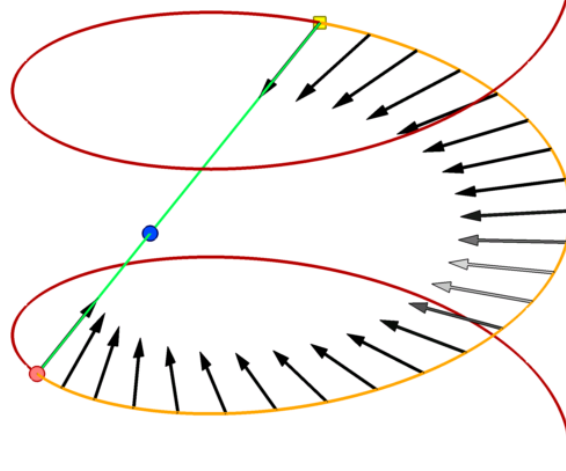


Abb. 3.1: Vektorfeld α_x

Schließlich definieren wir noch den *Rückprojektionsoperator*, der für den Typ des Algorithmus namensgebend ist.

3.1.3 Definition (Rückprojektionsoperator): Für Funktionen $g : \Gamma \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Rückprojektionsoperator $\mathcal{D}^\#$ definiert durch:

$$(\mathcal{D}^\# g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathcal{D}^\# g)(x) := \int_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - a(t)\|} g(a(t), \alpha_x(t)) dt. \quad (3.5)$$

Dieser Operator wird so bezeichnet, da er (anschaulich betrachtet) die Messwerte g zurück in den Raum ausstrahlt. Beim Algorithmus von Katsevich werden die Messwerte $\mathcal{D}f$ zunächst mit ∂ und \mathcal{H}^β gefiltert, und anschließend mit $\mathcal{D}^\#$ rückprojiziert, daher gehört er zur Klasse von Algorithmen vom FBP-Typ, was für *filtered backprojection* (= gefilterte Rückprojektion) steht. Wir formulieren das als einen zentralen Satz:

3.1.4 Satz (Inversionsformel von Katsevich): Für Funktionen $f \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} (\mathcal{D}^\# \circ \mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - a(t)\|} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} (\mathcal{D}f)(a(q), \Theta^\beta(\alpha_x(t), \gamma)) \Big|_{q=t} \frac{d\gamma}{\sin(\gamma)} dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

vorausgesetzt die Abbildung β erfüllt die Bedingung

$$\sum_{\lambda \in I_{PI}(x) : a(\lambda) \in \Pi(x, \xi)} \operatorname{sgn}(\dot{a}(\lambda) \cdot \xi) \operatorname{sgn}(\beta_x(\lambda) \cdot \xi) =: B^\beta(x, \xi) = 1 \quad (3.7)$$

für alle $x \in \Omega$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Beweis: Wir betrachten zuerst die beiden Filter-Operatoren:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(a(t), \alpha_x(t)) \\
& \stackrel{0}{=} -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} (\mathcal{D}f)(a(q), \Theta^\beta(\alpha_x(t), \gamma)) \Big|_{q=t} \frac{d\gamma}{\sin(\gamma)} \\
& \stackrel{1}{=} -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial q} f(a(q) + r\Theta^\beta(\alpha_x(t), \gamma)) \Big|_{q=t} \frac{rdrd\gamma}{r \sin(\gamma)} \\
& \stackrel{2}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\text{span}\{\alpha_x(t), \beta_x(t)\}} \frac{\partial}{\partial q} f(a(q) + u) \Big|_{q=t} \frac{du}{u \cdot \beta_x(t)} \\
& \stackrel{3}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\text{span}\{\alpha_x(t), \beta_x(t)\}} \frac{\partial}{\partial q} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) e^{-i\xi \cdot (a(q)+u)} d\xi \Big|_{q=t} \frac{du}{u \cdot \beta_x(t)} \\
& \stackrel{4}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\text{span}\{\alpha_x(t), \beta_x(t)\}} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (-i\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot (a(t)+u)} d\xi \frac{du}{u \cdot \beta_x(t)} \\
& \stackrel{5}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (i\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot a(t)} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi \cdot \alpha_x(t))u_1} du_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\xi \cdot \beta_x(t))u_2}}{u_2} du_2 \right) d\xi \\
& \stackrel{6}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (i\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot a(t)} (2\pi \delta(\xi \cdot \alpha_x(t))) (-i\pi \text{sgn}(\xi \cdot \beta_x(t))) d\xi \\
& \stackrel{7}{=} 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot a(t)} \delta(\xi \cdot \alpha_x(t)) \text{sgn}(\xi \cdot \beta_x(t)) d\xi.
\end{aligned}$$

In den Schritten (0) und (1) werden lediglich die Definitionen (3.1), (3.4) und (3.5) eingesetzt. Im zweiten Schritt werden die Polarkoordinaten (r, γ) in der $\alpha_x - \beta_x$ -Ebene durch die Substitution

$$\begin{aligned}
u &= r\Theta^\beta(\alpha_x(t), \gamma) = r \cos(\gamma)\alpha_x(t) + r \sin(\gamma)\beta_x(t) = u_1\alpha_x(t) + u_2\beta_x(t) \\
du &= r dr d\gamma
\end{aligned}$$

in kartesische Koordinaten überführt. Im dritten Schritt wird $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$ ausgenutzt (f ist eine Testfunktion, deswegen liegen f und $(\mathcal{F}^{-1}f)$ beide im Schwartzraum). Im vierten Schritt wird die Differentiation ausgeführt. Im fünften Schritt wird der Exponent von e auseinandergezogen, die Komponenten von ξ werden auf die Achsen α_x und β_x projiziert. Im entscheidenden sechsten Schritt werden die Darstellungen (2.7) und (2.9) verwendet. Der letzte Schritt beinhaltet nur noch elementare Kürzungen von Konstanten.

Nun erinnern wir an die Definition von $\alpha_x(t)$ in (3.3) sowie die Formeln (2.4), (2.5) und berechnen für $t \in I_{PI}(x)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\delta(\xi \cdot \alpha_x(t))}{\|x - a(t)\|} = \delta(\xi \cdot (x - a(t))) = \sum_{\lambda \in I_{PI}(x) : \xi \cdot a(\lambda) = \xi \cdot x} \frac{\delta_\lambda(t)}{|\xi \cdot \dot{a}(\lambda)|}. \quad (3.8)$$

Diese Formel gilt nur für *fast alle* ξ , denn falls die Ebene $\Pi(x, \xi)$ die Endpunkte von $C_{PI}(x)$ enthält, dann liegen die Nullstellen von $\xi \cdot (x - a(t))$ nicht mehr im Inneren des Intervalls $I_{PI}(x)$, und falls $\Pi(x, \xi)$ den Bogen $C_{PI}(x)$ tangiert, dann sind die Nullstellen nicht einfach, was die Voraussetzungen von (2.4) verletzt. Bei der Integration macht diese Nullmenge jedoch

3 Algorithmus von Katsevich

keinen Unterschied aus, und wir berechnen das Endergebnis nach der Rückprojektion:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} (\mathcal{D}^\# \circ \mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(x) \\
& \stackrel{0}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{I_{PI}(x)} \frac{1}{\|x - a(t)\|} (\mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(a(t), \alpha_x(t)) dt \\
& \stackrel{1}{=} \int_{I_{PI}(x)} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot a(t)} \frac{\delta(\xi \cdot \alpha_x(t))}{\|x - a(t)\|} \operatorname{sgn}(\xi \cdot \beta_x(t)) d\xi dt \\
& \stackrel{2}{=} \int_{I_{PI}(x)} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) (\xi \cdot \dot{a}(t)) e^{-i\xi \cdot a(t)} \sum_{\lambda \in I_{PI}(x) : \xi \cdot a(\lambda) = \xi \cdot x} \frac{\delta_\lambda(t)}{|\xi \cdot \dot{a}(\lambda)|} \operatorname{sgn}(\xi \cdot \beta_x(t)) d\xi dt \\
& \stackrel{3}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) \sum_{\lambda \in I_{PI}(x) : \xi \cdot a(\lambda) = \xi \cdot x} e^{-i\xi \cdot a(\lambda)} \frac{\xi \cdot \dot{a}(\lambda)}{|\xi \cdot \dot{a}(\lambda)|} \operatorname{sgn}(\xi \cdot \beta_x(\lambda)) d\xi \\
& \stackrel{4}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \sum_{\lambda \in I_{PI}(x) : a(\lambda) \in \Pi(x, \xi)} \operatorname{sgn}(\xi \cdot \dot{a}(\lambda)) \operatorname{sgn}(\xi \cdot \beta_x(\lambda)) d\xi \\
& \stackrel{5}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) e^{-i\xi \cdot x} B^\beta(x, \xi) d\xi \\
& \stackrel{6}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) e^{-i\xi \cdot x} d\xi \\
& \stackrel{7}{=} (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f)(x) \\
& \stackrel{8}{=} f(x).
\end{aligned}$$

Dabei wenden wir die Umformung (3.8) im zweiten Schritt an. Im vierten Schritt benutzen wir $\xi \cdot a(\lambda) = \xi \cdot x$. Im sechsten Schritt verwenden wir die Voraussetzung (3.7). ■

Der Beweis dieses Satzes ist nun abgeschlossen, allerdings haben wir den Algorithmus erst zur Hälfte konstruiert. Noch ist nämlich nicht klar, wie die Abbildung β bzw. das Vektorfeld β_x zu wählen ist, damit (3.7) erfüllt wird. Im nächsten Abschnitt befassen wir uns mit genau dieser Frage.

3.2 Wahl der Filterungslinien

Bevor wir uns mit der Konstruktion der Abbildung β_x mit der Eigenschaft (3.7) befassen, wollen wir uns die geometrische Bedeutung von β_x klar machen. Aus der Formel (3.6) geht hervor, dass für einen festen Punkt x und ein festes t die Hilberttransformation ausschließlich auf Richtungen in der $\alpha_x(t) - \beta_x(t)$ Ebene operiert, das bedeutet, dass für die Rekonstruktion in einem einzelnen Punkt x nur Werte von $\partial \circ \mathcal{D}f$ entlang einer Linie auf der Detektorebene gefiltert werden müssen. In der Abbildung 3.2 ist solch eine Filterungslinie eingezeichnet. Wenn wir also fragen, wie das Vektorfeld β_x aussehen soll, ist es äquivalent zur Frage, entlang welcher Linien gefiltert werden soll. Wir konstruieren in diesem Abschnitt das Vektorfeld β_x , dafür benötigen wir zuerst ein Vektorfeld u_x , welches wir wiederum durch eine mit $u(t_0, t_2)$ bezeichnete Hilfskonstruktion definieren.

Seien $t_0, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $|t_0 - t_2| < 2\pi$, dann schreiben wir abkürzend:

$$t_1 := \frac{t_0 + t_2}{2}, \quad (3.9)$$

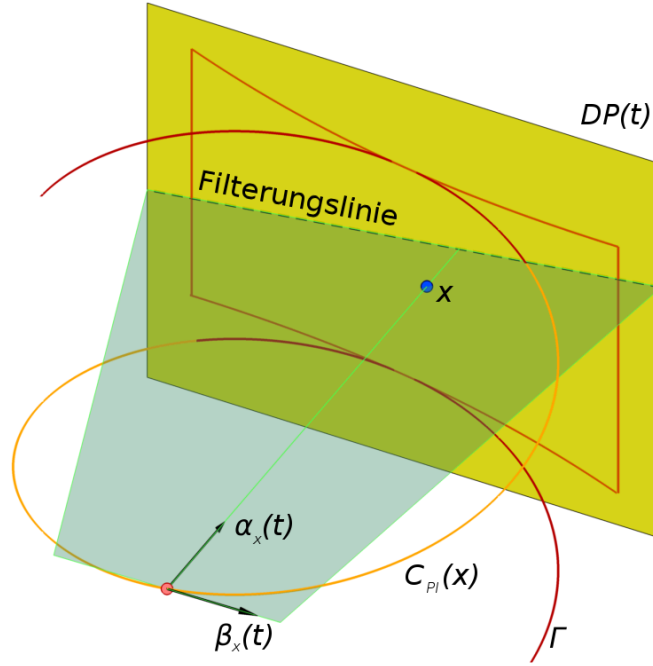


Abb. 3.2: Filterungslinie

und definieren:

$$u(t_0, t_2) := \frac{(a(t_1) - a(t_0)) \times (a(t_2) - a(t_0))}{\|(a(t_1) - a(t_0)) \times (a(t_2) - a(t_0))\|} \operatorname{sgn}(t_2 - t_0) \quad \text{für } t_2 \neq t_0. \quad (3.10)$$

Um das Verhalten für $t_2 \rightarrow t_0$ zu untersuchen, betrachten wir die Taylorentwicklung des Zählers bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned} & (a(t_1) - a(t_0)) \times (a(t_2) - a(t_0)) \\ &= \left(\dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \ddot{a}(t_0) \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(|t_1 - t_0|^3) \right) \\ & \quad \times \left(\dot{a}(t_0)(t_2 - t_0) + \ddot{a}(t_0) \frac{(t_2 - t_0)^2}{2} + \mathcal{O}(|t_2 - t_0|^3) \right) \\ &= \dot{a}(t_0) \times \ddot{a}(t_0) \frac{(t_2 - t_0)^3}{8} + \mathcal{O}(|t_2 - t_0|^4), \end{aligned}$$

wobei wir $t_1 - t_0 = \frac{t_2 - t_0}{2}$ verwenden, und die Tatsache ausnutzen, dass das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst immer verschwindet. Bemerke, dass für $t_2 < t_0$ die Signumfunktion in (3.10) das negative Vorzeichen der dritten Potenz von $(t_2 - t_0)$ aufhebt, deshalb gilt:

$$u(t_0, t_2) = \frac{\dot{a}(t_0) \times \ddot{a}(t_0) + \mathcal{O}(|t_2 - t_0|)}{\|\dot{a}(t_0) \times \ddot{a}(t_0) + \mathcal{O}(|t_2 - t_0|)\|},$$

woran wir die stetige Ergänzung von u in $t_2 = t_0$ ablesen:

$$u(t_0, t_2) := \frac{\dot{a}(t_0) \times \ddot{a}(t_0)}{\|\dot{a}(t_0) \times \ddot{a}(t_0)\|} \quad \text{für } t_0 = t_2. \quad (3.11)$$

3 Algorithmus von Katsevich

Wenn wir die Definition (2.10) verwenden, ohne Einschränkung $t_0 = 0$ setzen, und die dritte Komponente von $u(t_0, t_2)$ ausrechnen, dann stellen wir fest, dass u stets nach oben zeigt, für $t_0 \neq t_2$ gilt nämlich:

$$u(t_0, t_2) \cdot e_3 = \frac{R^2 \operatorname{sgn}(t_2 - t_0)}{\|\dots\|} ((\cos(t_1) - 1) \sin(t_2) - (\cos(t_2) - 1) \sin(t_1)) \quad (3.12)$$

$$= \frac{R^2 \operatorname{sgn}(t_2 - t_0)}{\|\dots\|} (\sin(t_2 - t_1) - \sin(t_2) + \sin(t_1)) > 0, \quad (3.13)$$

wobei mit $\|\dots\|$ der Nenner aus (3.10) gemeint ist. Um sich von der letzten Ungleichung zu überzeugen, dürfte ein flüchtiger Blick auf die Abbildung 4.1 im Anhang genügen, wo auch ein Beweis zu finden ist. Der Fall $t_0 = t_2$ ist trivial. Das Vektorfeld u_x wird nun aus $u(t_0, t_2)$ durch eine geschickte Wahl von t_2 konstruiert.

3.2.1 Lemma (Wahl von t_2): Seien $x \in \Omega$ und $t_0 \in I_{PI}(x)$ beliebig aber fest. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $t_2 \in I_{PI}(x)$ mit der Eigenschaft:

$$(x - a(t_0)) \cdot u(t_0, t_2) = 0 \quad \text{oder äquivalent: } x \in \Pi(a(t_0), u(t_0, t_2)). \quad (3.14)$$

Um Lemma 3.2.1 zu zeigen, betrachten wir alles aus der Sicht der Röntgenquelle. Wir definieren ein Koordinatensystem auf $DP(t_0)$ durch:

$$0_{DP} := \begin{bmatrix} -R \cos(t_0) \\ -R \sin(t_0) \\ \frac{h}{2\pi} t_0 \end{bmatrix}, \quad d_1 := \begin{bmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_3 := \begin{bmatrix} -\cos(t_0) \\ -\sin(t_0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

der Ursprung liegt also direkt gegenüber der Röntgenquelle, d_1 ist orthogonal zur e_3 -Achse, d_2 ist parallel zur e_3 -Achse und d_3 zeigt in die Detektorebene.

Wie bereits im zweiten Kapitel erwähnt, benötigen wir für den Beweis das so genannte *Tam-Danielsson-Fenster*. Die obere und untere Grenzen des Tam-Danielsson-Fensters erhalten wir als stereographische Projektion der Spirale auf die Detektorebene, in $d_1 - d_2$ -Koordinaten lautet die Parametrisierung:

$$\hat{a}(t) := \left[2R \frac{\sin(t - t_0)}{1 - \cos(t - t_0)}, \frac{h}{\pi} \frac{t - t_0}{1 - \cos(t - t_0)} \right]^T \quad \text{für } (t - t_0) \notin 2\pi\mathbb{Z}. \quad (3.16)$$

Die Skizze 3.4(links) verdeutlicht am Beispiel der ersten Komponente, wie diese beiden Ausdrücke zu Stande kommen. Mit Γ_{top} und Γ_{bot} bezeichnen wir die Kurven

$$\Gamma_{top} := \hat{a}((0, 2\pi)), \quad \Gamma_{bot} := \hat{a}((-2\pi, 0)). \quad (3.17)$$

In der d_1 -Richtung ist das Tam-Danielsson-Fenster durch die Strecken

$$\Gamma_l := \operatorname{conv} \{ \hat{a}(t_0 + 2\pi - \Delta), \hat{a}(t_0 - \Delta) \}, \\ \Gamma_r := \operatorname{conv} \{ \hat{a}(t_0 + \Delta), \hat{a}(t_0 - 2\pi + \Delta) \}$$

begrenzt, wobei $\Delta := 2 \arccos(r/R)$ so groß gewählt ist, dass die Projektion des Zylinders Ω gerade noch auf die Detektorfläche passt, siehe dazu Skizze 3.4(rechts).

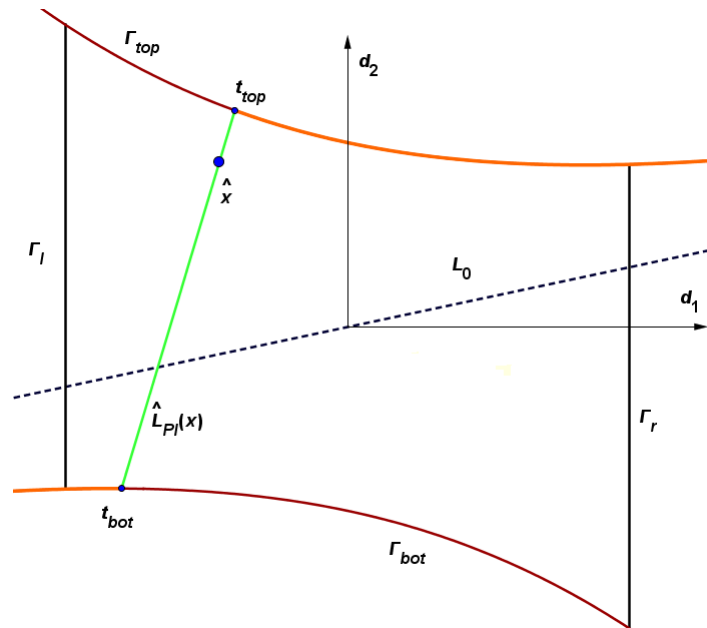


Abb. 3.3: Detektorebene $DP(t_0)$

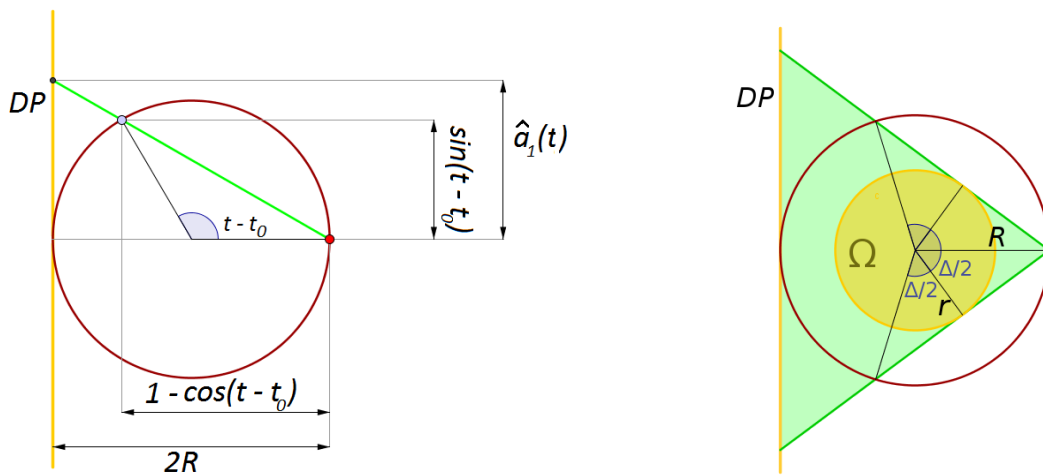


Abb. 3.4: Stereographische Projektion der Spirale auf die Detektorebene, erste Komponente (links); Wahl des möglichst kleinen Bildwinkels (rechts).

3 Algorithmus von Katsevich

Wenn wir die gegenseitige Lage von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren betrachten, dann stellen wir fest:

$$\begin{aligned} \det \left[\hat{a}, \ddot{a} \right] &= \det \left[\begin{array}{cc} \frac{-2R}{1-\cos} & \frac{2R \sin}{(1-\cos)^2} \\ \frac{h}{\pi} \frac{1-\cos-\phi \sin}{(1-\cos)^2} & \frac{h}{\pi} \frac{\phi-\phi \cos-2 \sin+2 \sin \cos+\phi \sin^2}{(1-\cos)^3} \end{array} \right] \\ &= \frac{2Rh}{\pi(1-\cos(\phi))^3} (\sin(\phi) - \phi) = \begin{cases} < 0 & \text{für } \phi \in (0, 2\pi) \\ > 0 & \text{für } \phi \in (-2\pi, 0) \end{cases}, \end{aligned}$$

das bedeutet, dass Γ_{top} und Γ_{bot} (vom Inneren des Tam-Danielsson-Fensters aus gesehen) strikt konvex sind, und wegen

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\hat{a}_2(t)}{\hat{a}_1(t)} = \frac{h}{2\pi R}$$

streben sie für $t \rightarrow t_0$ gegen eine Asymptote, die durch den Ursprung geht und Steigung $\frac{h}{2\pi R}$ hat. Diese Asymptote bezeichnen wir mit L_0 . Bemerke, dass L_0 parallel zum Geschwindigkeitsvektor $\dot{a}(t_0)$ verläuft. Die Abbildung 3.3 zeigt das Tam-Danielsson-Fenster mit der Projektion \hat{x} des Punktes x auf die Detektorebene. Bemerke, dass Strecken mit Endpunkten auf Γ_{top} und Γ_{bot} genau dann vertikal verlaufen, wenn die Differenz der Parameter genau 2π beträgt. Die Projektion $\hat{L}_{PI}(x)$ der PI-Strecke hat daher positive Steigung. Wir beweisen nun das Lemma 3.2.1.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Existenz einer Lösung t_2 von (3.14). Wir betrachten die Ebenenschar

$$FP(t_0, t_2) := \Pi(a(t_0), u(t_0, t_2)), \quad (3.18)$$

die im aktuellen Kontext nur von t_2 abhängt (vgl. Formulierung des Lemmas). Mit

$$FL(t_0, t_2) := FP(t_0, t_2) \cap DP(t_0) \quad (3.19)$$

bezeichnen wir die dazu gehörende Geradenschar von Filterungslinien auf der Detektorebene. Aus der Definition von t_1 (3.9) ist klar, dass $t_2 - t_0$ und $t_1 - t_0$ stets dasselbe Vorzeichen haben, deswegen muss die Filterungslinie für $t_0 \neq t_2$ entweder Γ_{top} oder Γ_{bot} genau zwei Mal in den Punkten $\hat{a}(t_2)$ und $\hat{a}(t_1)$ schneiden. Für $t_0 = t_2$ stimmt $FL(t_0, t_2)$ mit L_0 überein. Angenommen \hat{x} befindet sich oberhalb von L_0 . Die Filterungslinie $FL(t_0, t_{top}(x))$ enthält offensichtlich den Punkt $\hat{a}(t_{top})$, und muss daher oberhalb von \hat{x} verlaufen. Für $t_2 \rightarrow t_0$ nähert sich $FL(t_0, t_2)$ der Asymptote L_0 . Der Ausdruck in (3.14) kann als signierte Distanz zwischen x und $FP(t_0, t_2)$ aufgefasst werden, welche stetig von t_2 abhängt. Da diese Distanz für $t_2 \in [t_0, t_{top}(x)]$ das Vorzeichen wechselt, muss es mindestens ein t_2 geben, wo der Zwischenwert 0 angenommen wird. Damit ist die Existenz mindestens einer Lösung t_2 gezeigt.

Für die Eindeutigkeit ist die Konvexität von Γ_{top} beziehungsweise Γ_{bot} entscheidend. Wir nehmen wieder an, dass \hat{x} oberhalb von L_0 liegt. Angenommen es gäbe zwei Lösungen $t_2, t'_2 \in (t_0, t_{top})$, $t_2 > t'_2$. Wegen Definition (3.9) müsste gelten:

$$t_1 = \frac{t_2 + t_0}{2} > \frac{t'_2 + t_0}{2} = t'_1. \quad (3.20)$$

Wie man aber an der Skizze 3.5(rechts) sieht, gilt wegen der Konvexität von Γ_{top} :

$$t_2 > t'_2 > t'_1 > t_1, \quad (3.21)$$

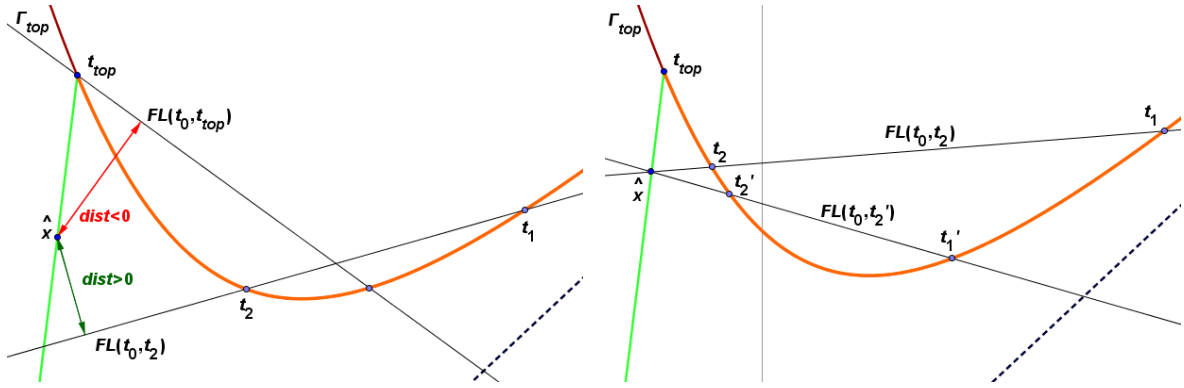


Abb. 3.5: Existenz (links) und Eindeutigkeit (rechts) von t_2 .

was einen Widerspruch ergibt. Parameter aus dem anderen Abschnitt des PI-Intervalls $t'_2 \in [t_{bot}, t_0]$ kommen nicht in Frage, weil für diese der Schnittpunkt $\hat{a}(t'_1)$ auf Γ_{top} liegen würde, was der Tatsache $\text{sgn}(t_2 - t_0) = \text{sgn}(t_1 - t_0)$ widerspricht. Daher kann es nur eine Lösung t_2 geben. Für \hat{x} auf oder unterhalb der Geraden L_0 argumentiert man analog. ■

Wir können also t_2 als Funktion von x und t auffassen, und definieren:

3.2.2 Definition (Vektorfelder u_x und β_x):

$$u_x(t) := u(t, t_2(x, t)), \quad \beta_x(t) := \alpha_x(t) \times u_x(t). \tag{3.22}$$

Bemerke, dass $\{\alpha_x(t), u_x(t), \beta_x(t)\}$ für jedes t eine (rechtshändige) Orthonormalbasis ist. Wir müssen nun zeigen, dass β_x die Bedingung (3.7) erfüllt.

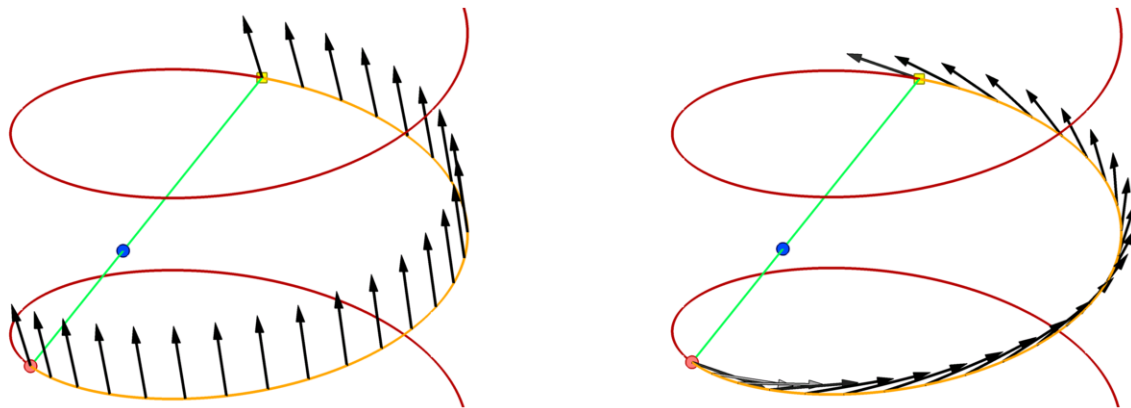


Abb. 3.6: Vektorfelder u_x (links) und β_x (rechts) für ein festes x .

3.2.3 Satz (Wahl der Filterungslinien): In (3.22) definiertes Vektorfeld β_x erfüllt die Bedingung (3.7).

3 Algorithmus von Katsevich

Beweis: Offensichtlich hängt der Wert von $B^\beta(x, \xi)$ nur von der Richtung $\frac{\xi}{\|\xi\|} \in \mathbb{S}^2$ für $\xi \neq 0$ ab, daher brauchen wir die Aussage nur für $\xi \in \mathbb{S}^2$ zu zeigen. Der Punkt $\xi = 0$ ist eine Nullmenge, und kann daher ignoriert werden. Wir unterteilen \mathbb{S}^2 wie folgt:

$$Crit(x) := \{\xi \in \mathbb{S}^2 \mid a(t_{bot}(x)), a(t_{top}(x)) \in \Pi(x, \xi) \text{ oder } \Pi(x, \xi) \text{ tangiert } C_{PI}(x)\} \quad (3.23)$$

$$\Xi_1(x) := \{\xi \in \mathbb{S}^2 \setminus Crit(x) \mid \Pi(x, \xi) \text{ schneidet } C_{PI} \text{ in genau einem Punkt}\} \quad (3.24)$$

$$\Xi_3(x) := \mathbb{S}^2 \setminus (Crit(x) \cup \Xi_1(x)) \quad (3.25)$$

$$\Phi(x) := \{\xi \in \mathbb{S}^2 \mid \xi = \pm u_x(t) \text{ für ein } t \in I_{PI}\}. \quad (3.26)$$

Per Definition ist die Einheitssphäre disjunkte Vereinigung von $Crit(x)$ und $\Xi_{1,3}(x)$, die Mengen $\Xi_{1,3}(x)$ sind offen, und werden voneinander durch $Crit(x)$ getrennt. Die Mengen $Crit(x)$ und $\Phi(x)$ sind jeweils aus mehreren Kurven auf der Sphäre zusammengesetzt, und haben Maß 0 (siehe Abbildung 3.7).

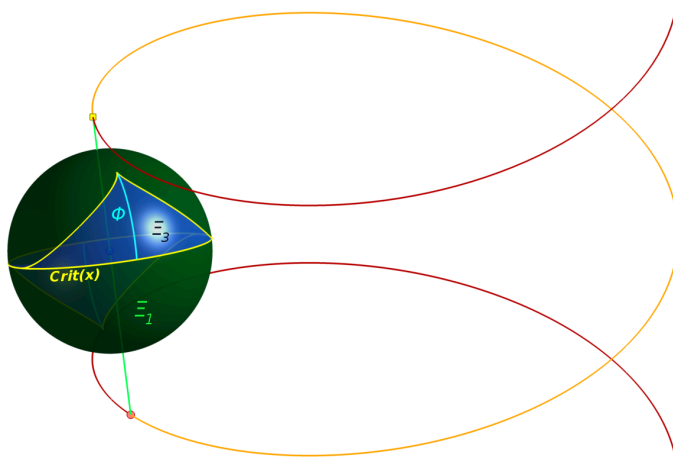


Abb. 3.7: Mengen $Crit(x)$, $\Xi_{1,3}$ und Φ . Die Sphäre ist mit Mittelpunkt x eingezeichnet.

Sei $\xi \notin Crit(x)$. Wir wählen ein $t_0 \in \overset{\circ}{I}_{PI}(x)$ mit $(x - a(t_0)) \cdot \xi = 0$ und betrachten die Ebene $DP(t_0)$. In dieser Ebene tragen wir mehrere Geraden durch \hat{x} ein: L'_0 soll parallel zu L_0 verlaufen, und L_{tan} soll Γ_{top} oder Γ_{bot} im Punkt $\hat{a}(t_{tan})$ tangieren, je nach dem, ob \hat{x} oberhalb oder unterhalb der Geraden L_0 liegt (wir betrachten wieder nur den ersten Fall). Dabei soll t_{tan} in $I_{PI}(x)$ liegen, und ist durch diese Forderung eindeutig festgelegt. Falls \hat{x} genau auf L_0 liegt, dann ist $t_{tan} = t_0$ und $L_{tan} = L_0$. Die Geraden L'_0 , L_{tan} und $\hat{L}_{PI}(x)$ zerlegen die Detektorebene in drei Bereiche D_1, D_2, D_3 , wie in Abbildung 3.8 gezeigt. Sei

$$L(x, \xi) := DP(t_0) \cap \Pi(x, \xi) \quad (3.27)$$

die Schnittgerade der Ebenen $\Pi(x, \xi)$ und $DP(t_0)$. Wegen $\xi \notin Crit(x)$ kann $L(x, \xi)$ nicht mit $\hat{L}_{PI}(x)$ übereinstimmen, weil es gegen die erste Bedingung in (3.23) verstoßen würde, sie kann auch nicht mit L'_0 oder L_{tan} übereinstimmen, weil dann die Ebene $\Pi(x, \xi)$ den Bogen $C_{PI}(x)$ tangieren würde. Also muss $L(x, \xi)$ in einem der Bereiche D_j liegen. Falls $L(x, \xi) \subset D_1$, dann gibt es genau einen Schnittpunkt mit dem Bogen $C_{PI}(x)$, nämlich bei t_0 , und ξ gehört dann zu Ξ_1 . Dieser Fall ist auf der Abbildung 3.8 dargestellt, beachte, dass der Schnittpunkt mit

3.2 Wahl der Filterungslinien

Γ_{bot} nicht zu $C_{PI}(x)$ gehört. Falls $L(x, \xi) \subset D_2$, dann gibt es zwei Schnittpunkte mit Γ_{top} , also insgesamt drei Schnittpunkte in $\Pi(x, \xi) \cap C_{PI}(x)$ mit Parametern $t_0 < \lambda_{mid} < \lambda_{top}$. In diesem Fall gehört ξ zu Ξ_3 . Falls $L(x, \xi) \subset D_3$, dann schneidet $L(x, \xi)$ sowohl Γ_{top} als auch Γ_{bot} jeweils ein Mal. Es gibt also wieder drei Schnittpunkte in $\Pi(x, \xi) \cap C_{PI}(x)$ mit Parametern $\lambda_{bot} < t_0 < \lambda_{top}$, und ξ gehört auch zu Ξ_3 . Daraus folgt, dass für alle ξ aus Ξ_3 genau drei Schnittpunkte existieren, und dass $L(x, \xi)$ in D_2 oder D_3 liegt.

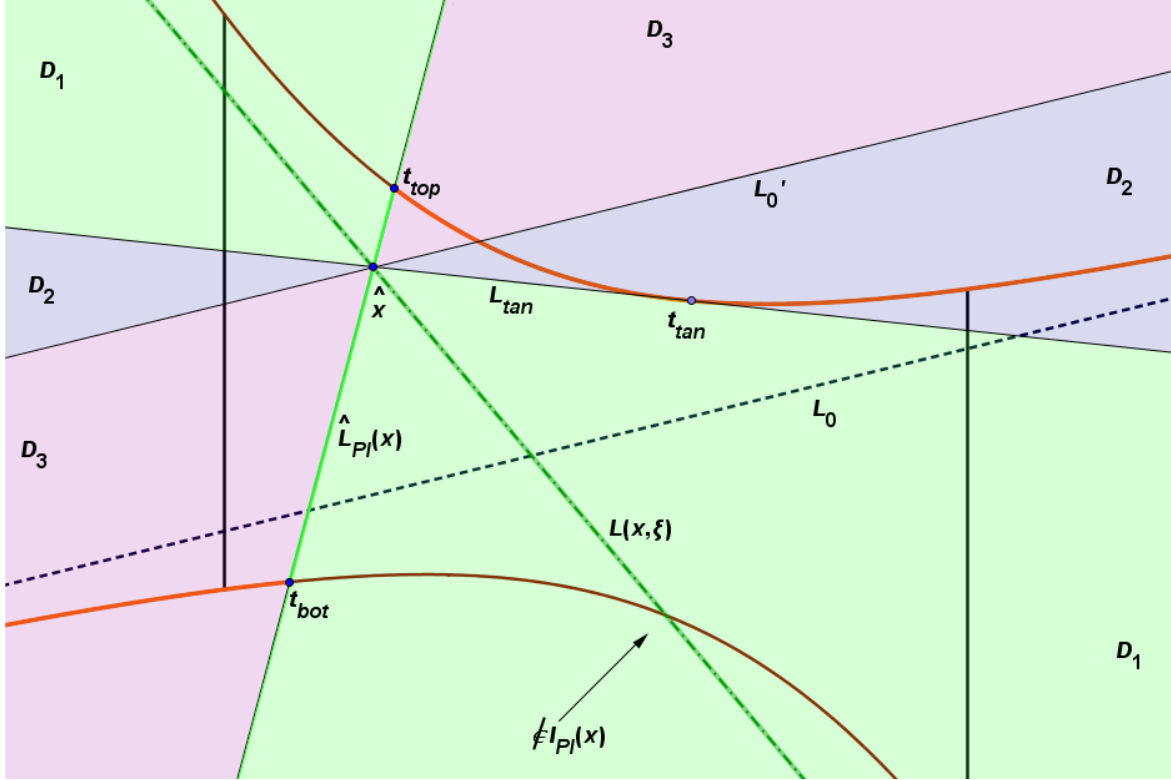


Abb. 3.8: Zerlegung der Detektorebene $DP(t_0)$

Um die Berechnung der Summe (3.7) zu vereinfachen, müssen wir alle in dieser Formel auftretenden Vektoren in geeigneter Weise auf die Detektorebene projizieren. Wir setzen:

$$\hat{\xi} := d_3 \times (\xi \times d_3), \quad (3.28)$$

wobei d_3 in (3.15) definierte Vektor ist, der in die Detektorebene $DP(t_0)$ zeigt. Per Definition ist $\hat{\xi}$ parallel zur Detektorebene und orthogonal zu der Linie $L(x, \xi)$, denn der zweite Faktor ist genau der Richtungsvektor von $L(x, \xi)$. Ferner gilt:

$$\xi \cdot \hat{\xi} = \xi \cdot (d_3 \times (\xi \times d_3)) = (\xi \times d_3) \cdot (\xi \times d_3) = \|\xi \times d_3\|^2 > 0. \quad (3.29)$$

Für den Vektor $\beta_x(t_0)$ definieren wir ähnlich:

$$\hat{\beta}_x(t_0) := d_3 \times u_x(t_0), \quad (3.30)$$

dies ist ein Richtungsvektor der Geraden $L(x, u_x(t_0))$ (vgl. (3.27)). Wir blenden den Parameter t_0 aus, und berechnen:

$$\beta_x \cdot \hat{\beta}_x = \beta_x \cdot (d_3 \times u_x) = d_3 \cdot (u_x \times \beta_x) = d_3 \cdot \alpha_x > 0, \quad (3.31)$$

3 Algorithmus von Katsevich

das heißt $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}_x$ zeigen im gewissen Sinne in dieselben Richtungen wie ξ und β_x , vgl. Skizze 3.9.

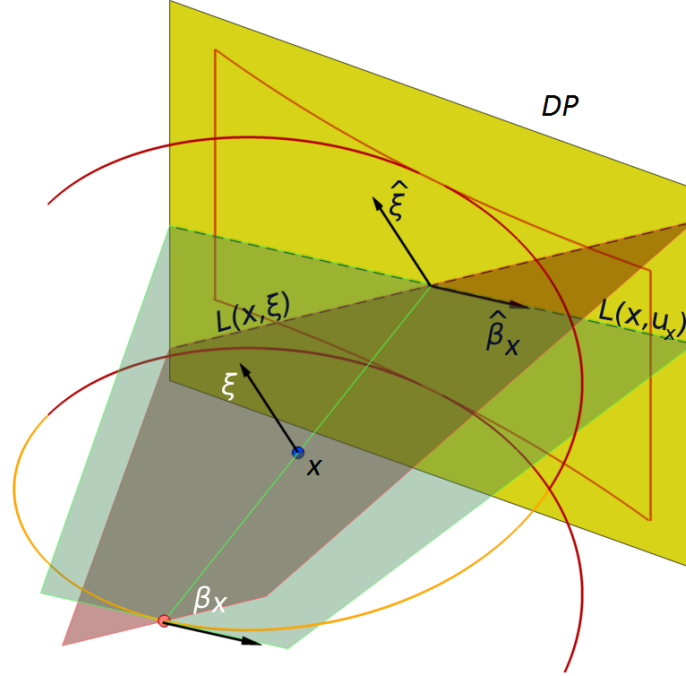


Abb. 3.9: Verhältnis von ξ , β_x zu $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}_x$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_x \cdot \hat{\xi} &= \hat{\beta}_x \cdot (\xi - d_3(\xi \cdot d_3)) \\
 &= \hat{\beta}_x \cdot \xi - 0 \\
 &= (d_3 \times (\beta_x \times \alpha_x)) \cdot \xi \\
 &= (\beta_x(d_3 \cdot \alpha_x) - \alpha_x(d_3 \cdot \beta)) \cdot \xi \\
 &= (\beta_x \cdot \xi)(d_3 \cdot \alpha_x),
 \end{aligned}$$

und schließen daraus:

$$\text{sgn}(\beta_x \cdot \xi) = \text{sgn}(\hat{\beta}_x \cdot \hat{\xi}). \quad (3.32)$$

Dabei haben wir in der Rechnung mehrfach die Graßmann-Identität („BAC-CAB-Regel“) angewandt und

$$\hat{\beta} \cdot d_3 = 0, \quad \xi \cdot \alpha_x = 0, \quad u_x = \beta_x \times \alpha_x$$

verwendet. Bei der Schlussfolgerung haben wir wieder $d_3 \cdot \alpha_x > 0$ benutzt. Schließlich berechnen wir noch

$$\hat{\xi} \cdot \dot{a} = (\xi - d_3(\xi \cdot d_3)) \cdot \dot{a} = \xi \cdot \dot{a} - 0 = \xi \cdot \dot{a},$$

und folgern daraus zusammen mit (3.32):

$$\text{sgn}(\xi \cdot \dot{a}(t_0)) \text{sgn}(\beta_x(t_0) \cdot \xi) = \text{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(t_0)) \text{sgn}(\hat{\beta}_x(t_0) \cdot \hat{\xi}). \quad (3.33)$$

3.2 Wahl der Filterungslinien

Diese Vereinfachung benutzen wir nun, um $B^\beta(x, \xi)$ auszurechnen. Dabei werden wir *Richtungen* auf verschiedenen Detektorebenen betrachten, und die Werte der einzelnen Summanden von $B^\beta(x, \xi)$ an den Skizzen 3.10 und 3.11 ablesen. Bevor wir ins Detail gehen, wollen wir uns

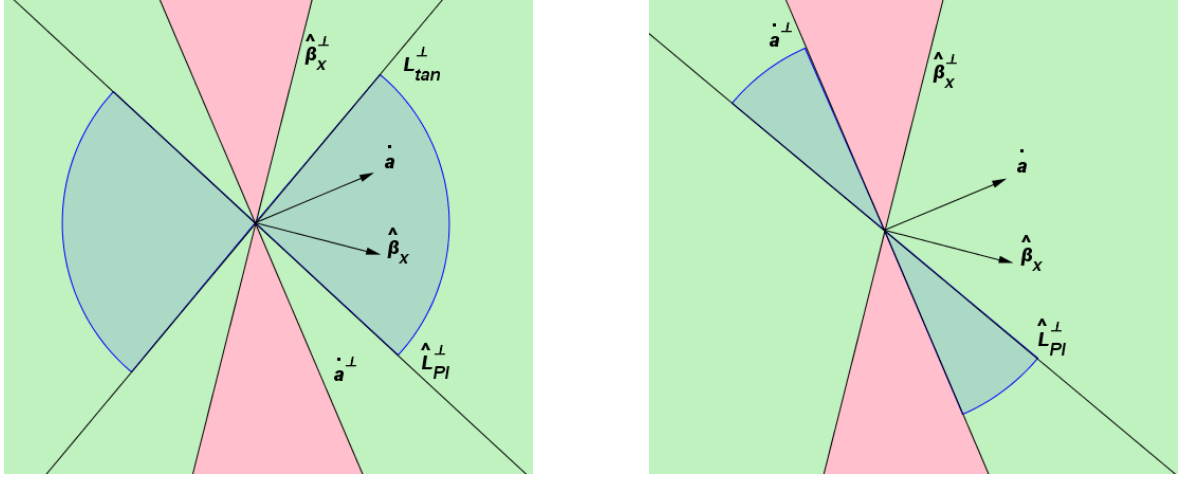


Abb. 3.10: Richtungen auf Detektorebenen $DP(t_0)$ für I(links) und $DP(\lambda_{mid})$ für II.2(rechts). Die blauen Sektoren markieren mögliche Richtungen von $\hat{\xi}$.

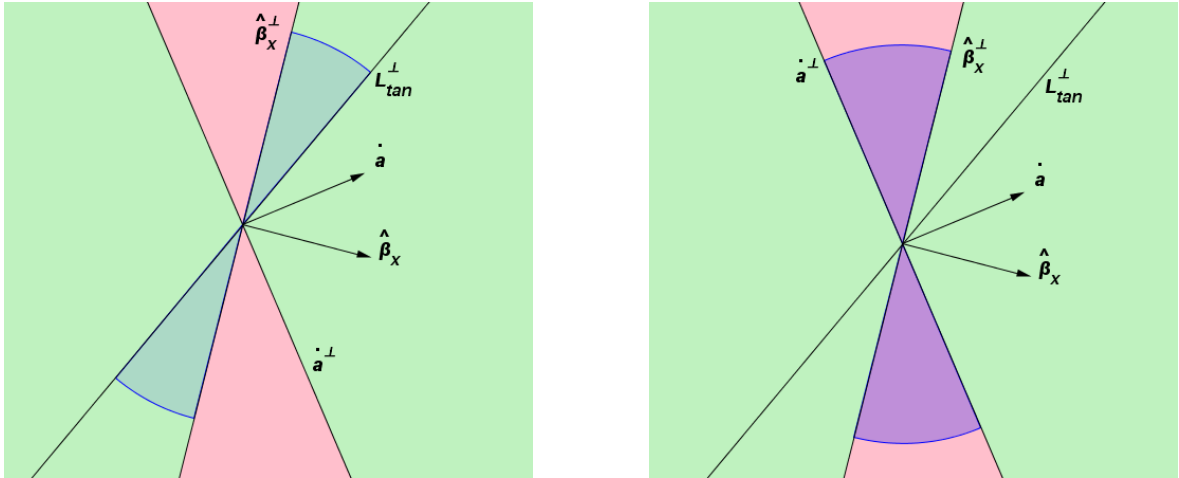


Abb. 3.11: Fallunterscheidung auf der Ebene $DP(\lambda_{bot})$ für II.1.a und II.1.b

zuerst klar machen, wie diese Abbildungen zu interpretieren sind. Auf diesen Abbildungen sind Richtungsvektoren in der jeweiligen Detektorebene eingetragen. Auf allen vier Bildern ist der Geschwindigkeitsvektor \dot{a} zu sehen, der stets parallel zu der Linie L_0 verläuft, und nach oben-rechts zeigt. Daneben ist $\hat{\beta}_x$ eingezeichnet, dieser Vektor zeigt wegen (3.12) und

$$\hat{\beta}_x \cdot d_1 = (d_3 \times u_x) \cdot d_1 = u_x \cdot (d_1 \times d_3) = u_x \cdot d_2 = u_x \cdot e_3 > 0$$

stets nach rechts. Die Linien \dot{a}^\perp und $\hat{\beta}_x^\perp$ sind orthogonal zu \dot{a} bzw. $\hat{\beta}_x$, sie trennen voneinander die Bereiche, in den die Funktion aus (3.33) Werte +1 (grün) und -1 (rot) annimmt. Blaue

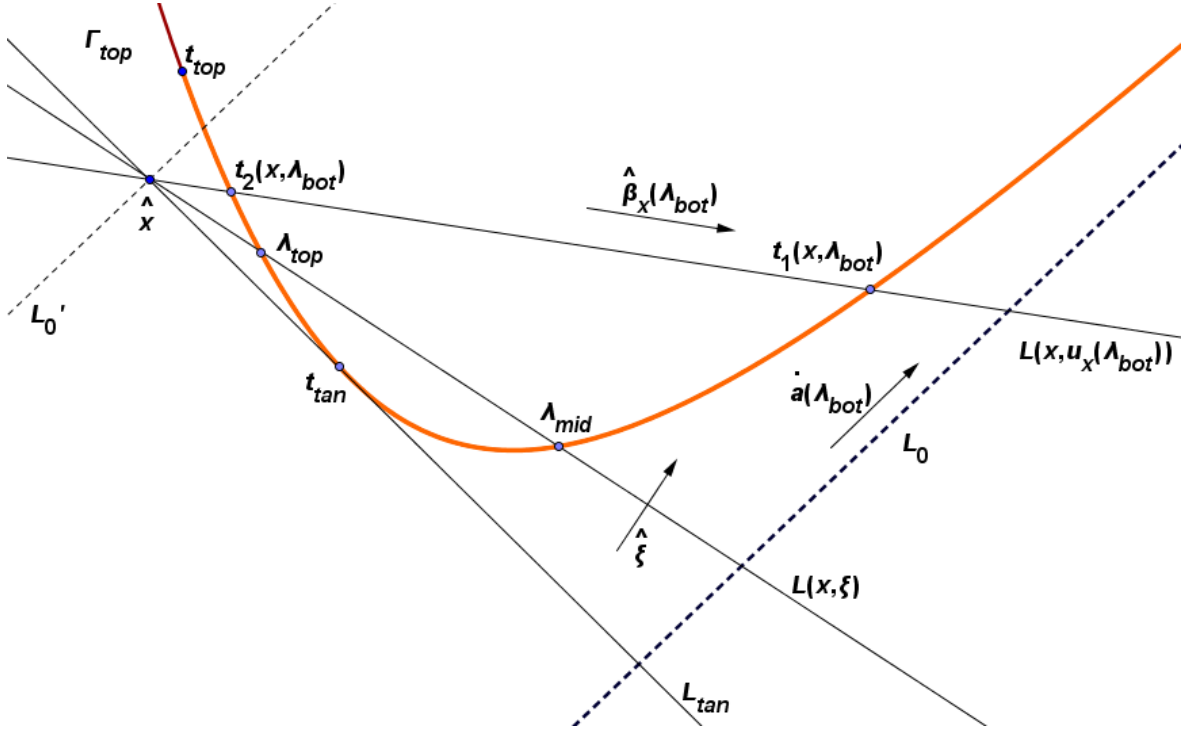


Abb. 3.12: Detektorebene $DP(\lambda_{bot})$ im Fall II.1.a.

Kreis-sektoren zeigen jeweils an, welche Richtungen $\hat{\xi}$ annehmen kann. Daran kann man dann jeweils den Wert von (3.33) ablesen. Die Lage der Linien \hat{L}_{PI}^\perp und L_{tan}^\perp wird klar, wenn man bedenkt, dass \hat{L}_{PI} immer steiler als L_0 ist, und dass $\hat{a}(t_{tan})$ stets unter $L(x, u_x)$ liegt, wenn \hat{x} oberhalb von L_0 liegt (vgl. 3.8).

Die Beiträge der jeweiligen Schnittpunkte in $\Pi(x, \xi) \cap C_{PI}(x)$ erhalten wir aus der folgenden Fallunterscheidung:

- I. $\xi \in \Xi_1(x)$. In diesem Fall gibt es nur einen Schnittpunkt in $\Pi(x, \xi) \cap C_{PI}(x)$, welchen wir mit $a(t_0)$ bezeichnen. Die Linie $L(x, \xi)$ muss im Bereich D_1 der Ebene $DP(t_0)$ zwischen $\hat{L}_{PI}(x)$ und L_{tan} verlaufen, daraus ergeben sich Einschränkungen an $\hat{\xi}$, wie in der Skizze 3.10 (links) zu sehen. Wir stellen fest, dass $\hat{\xi}$ stets im grünen Bereich liegt, und lesen ab:

$$B^\beta(x, \xi) = \text{sgn}(\hat{\xi} \cdot \hat{a}(t_0)) \text{sgn}(\hat{\beta}_x(t_0) \cdot \hat{\xi}) = 1. \quad (3.34)$$

- II. $\xi \in \Xi_3(x) \setminus \Phi(x)$. In diesem Fall gibt es drei Schnittpunkte in $\Pi(x, \xi) \cap C_{PI}(x)$, die entsprechenden Parameter bezeichnen wir mit $\lambda_{bot} < \lambda_{mid} < \lambda_{top} \in \overset{\circ}{I}_{PI}(x)$.

II.1. Wir berechnen zuerst den Beitrag des unteren Schnittpunktes zu der Summe. Dazu betrachten wir die Ebene $DP(\lambda_{bot})$. Die beiden anderen Schnittpunkte befinden sich weiter oben, und sind deshalb auf Γ_{top} rechts von t_{top} zu finden, in diesen beiden Punkten wird Γ_{top} von $L(x, \xi)$ geschnitten. Wir erinnern uns an Definition von $t_2(x, \lambda_{bot})$ in (3.22), und unterscheiden die Fälle $t_2 < \lambda_{top}$ und $t_2 > \lambda_{top}$.

- II.1.a. Falls $t_2(x, \lambda_{bot}) > \lambda_{top}$, dann verläuft $L(x, \xi)$ zwischen L_{tan} und $L(x, u_x(\lambda_{bot}))$, wie in der Abbildung 3.12 zu sehen ist. Deshalb kann $\hat{\xi}$ nur in Richtungen

zwischen L_{tan}^\perp und $\hat{\beta}_x^\perp$ zeigen, wie in 3.11(links) zu sehen ist. Wir lesen ab:

$$\operatorname{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(\lambda_{bot})) \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_x(\lambda_{bot}) \cdot \hat{\xi}) = 1. \quad (3.35)$$

II.1.b. Falls $t_2(x, \lambda_{bot}) < \lambda_{top}$, dann wandert $L(x, \xi)$ auf der Skizze 3.12 über $L(x, u_x(\lambda_{bot}))$ nach oben, und verläuft dann zwischen $L(x, u_x(\lambda_{bot}))$ und L'_0 . Also kann ξ nur in Richtungen zwischen $\hat{\beta}_x^\perp$ und \dot{a}^\perp zeigen. An der Skizze 3.11 (rechts) lesen wir ab:

$$\operatorname{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(\lambda_{bot})) \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_x(\lambda_{bot}) \cdot \hat{\xi}) = -1. \quad (3.36)$$

Der Fall $t_2(x, \lambda_{bot}) = \lambda_{top}$ kann nicht eintreten, da ansonsten im Widerspruch zur Voraussetzung $\xi = \pm u_x(\lambda_{bot})$ gelten würde (vgl. die Definition von Φ in (3.26)).

II.2. Nun berechnen wir den Beitrag des mittleren Schnittpunktes bei λ_{mid} . In der Detektorebene $DP(\lambda_{mid})$ muss die Gerade $L(x, \xi)$ in D_3 verlaufen, weil sie Γ_{bot} bei λ_{bot} und Γ_{top} bei λ_{top} schneidet. Der Bereich D_3 ist von L'_0 und \hat{L}_{PI} begrenzt, deshalb liegt $\hat{\xi}$ zwischen \dot{a}^\perp und \hat{L}_{PI}^\perp , wie in der Skizze 3.10(rechts) zu sehen. Wir lesen ab:

$$\operatorname{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(\lambda_{mid})) \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_x(\lambda_{mid}) \cdot \hat{\xi}) = 1. \quad (3.37)$$

II.3. Zum Schluss betrachten wir den obersten Schnittpunkt mit dem Parameter λ_{top} . In der Ebene $DP(\lambda_{top})$ sind die beiden anderen Schnittpunkte mit Parametern λ_{bot} und λ_{mid} auf der Kurve Γ_{bot} links von t_{bot} zu finden. Der Beitrag des obersten Schnittpunktes hängt davon ab, welcher Fall bei III eingetreten ist.

II.3.a. Angenommen der Fall II(1)a ist eingetreten, das heißt:

$$t_1(x, \lambda_{bot}) =: t_1 < \lambda_{mid} < \lambda_{top} < t_2 := t_2(x, \lambda_{bot}). \quad (3.38)$$

Dann muss $L(x, \xi)$ in der Ebene $DP(\lambda_{top})$ unterhalb von $L(x, u_x(\lambda_{top}))$ verlaufen, wie in der Skizze 3.13 gezeigt. Dies zeigen wir mit einem kleinen Widerspruchsbeweis. Würde nämlich $L(x, \xi)$ zwischen L_{tan} und $L(x, u_x(\lambda_{top}))$ verlaufen, dann würde gelten:

$$t_2(x, \lambda_{top}) =: t'_2 < \lambda_{bot} < \lambda_{mid} < t'_1 := t_1(x, \lambda_{top}). \quad (3.39)$$

Zusammen mit (3.38) würde dies ergeben:

$$\begin{aligned} t'_2 &< \lambda_{mid} < t_2 \\ t_1 &< \lambda_{mid} < t'_1, \end{aligned}$$

wenn man jedoch t_1, t'_1 explizit gemäß (3.9) ausschreibt, erhält man:

$$t_1 = \frac{t_2 + \lambda_{bot}}{2} > \frac{t_2 + t'_2}{2} > \frac{\lambda_{top} + t'_2}{2} = t'_1, \quad (3.40)$$

was im offensichtlichen Widerspruch zu der Zeile davor steht. Daher muss

$$\lambda_{bot} < t_2(x, \lambda_{top}) < t_1(x, \lambda_{top}) < \lambda_{mid} \quad (3.41)$$

gelten, und der Wert von (3.33) ergibt sich für λ_{top} analog zu II(1)b:

$$\operatorname{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(\lambda_{top})) \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_x(\lambda_{top}) \cdot \hat{\xi}) = -1. \quad (3.42)$$

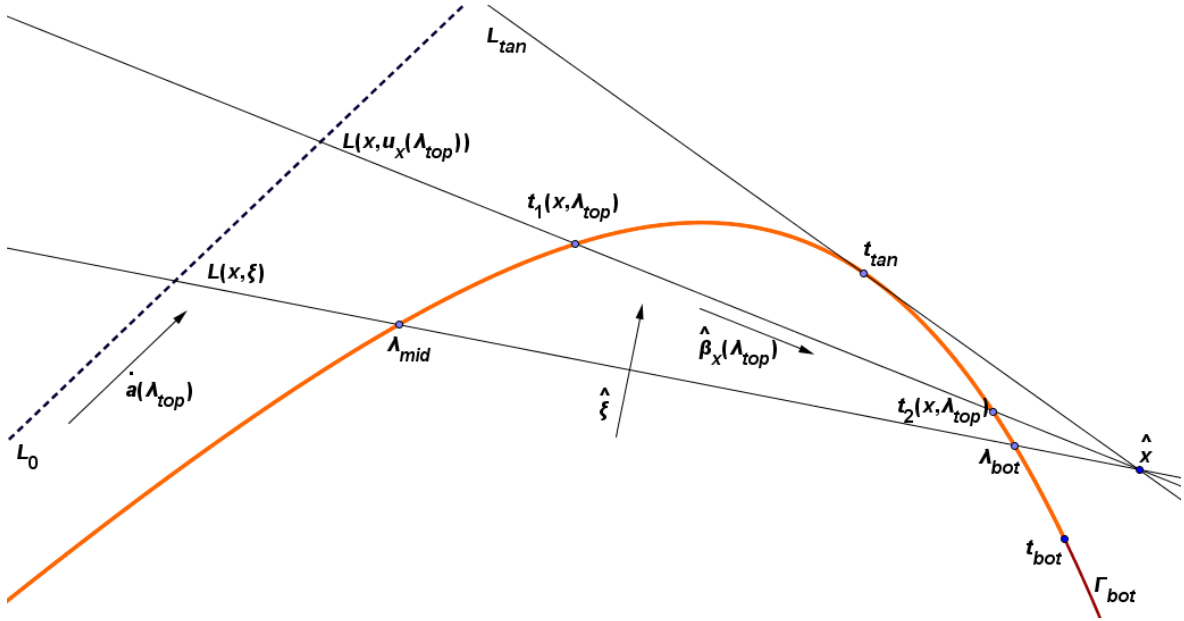


Abb. 3.13: Detektorebene $DP(\lambda_{top})$ im Fall II.3.a.

II.3.b. Angenommen der Fall II(1)b tritt ein. Wir argumentieren genau wie in II(3)a und stellen fest, dass $L(x, \xi)$ zwischen L_{tan} und $L(x, u_x(\lambda_{top}))$ verläuft. Wir berechnen analog zu II(1)a:

$$\text{sgn}(\hat{\xi} \cdot \dot{a}(\lambda_{top})) \text{sgn}(\hat{\beta}_x(\lambda_{top}) \cdot \hat{\xi}) = 1. \quad (3.43)$$

Wir benutzen jetzt (3.33) und addieren alle Beiträge der einzelnen Schnittpunkte zu $B^\beta(x, \xi)$ auf:

I	= 1	
II(1)a + II2 + II(3)a	= 1 + 1 - 1	= 1
II(1)b + II2 + II(3)b	= -1 + 1 + 1	= 1.

Damit haben wir gezeigt, dass für alle $\xi \in \Xi_1 \cup (\Xi_3 \setminus \Phi)$ die Bedingung (3.7) erfüllt ist. Für $\xi \in \text{Crit}(x) \cup \Phi(x)$ brauchen wir nichts zu zeigen, weil $\text{Crit}(x)$ und $\Phi(x)$ Nullmengen sind, und in der Voraussetzung des Satzes 3.1.4 die Bedingung nur für *fast alle* ξ sicherzustellen war. Damit ist die Konstruktion des Algorithmus von Katsevich abgeschlossen. ■

3.3 Aufwand und Anforderungen an den Detektor

Zum Abschluss wollen wir noch kurz begründen, warum der Algorithmus von Katsevich vergleichsweise schnell ist, wenig Speicher benötigt, und mit einem kleinen Detektor auskommt. Dazu betrachten wir nacheinander alle in der Inversionsformel verwendeten Operatoren.

Der erste Filterungsoperator ∂ benötigt nur nah beieinander liegende Datenpunkte, dazu reichen nur wenige aufeinanderfolgende Projektionen, die für die Filterung kurz im Speicher

3.3 Aufwand und Anforderungen an den Detektor

vorhanden sein müssen, und danach überschrieben werden können, im Vergleich zum rekonstruierten räumlichen Datensatz ist dieser zusätzliche Speicheraufwand vernachlässigbar.

Um die Hilberttransformation $\mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f$ schnell zu berechnen, müssen wir die projizierten Punkte geeignet gruppieren. Dazu betrachten wir für Parameter $t_0 \in \mathbb{R}$ und $t_2 \in [t_0 - 2\pi + \Delta, t_0 + 2\pi - \Delta]$ die Filterungslinie $FL(t_0, t_2)$ (vgl. (3.19)) und die dazu gehörige Ebene $FP := FP(t_0, t_2)$ (vgl. (3.18)). Bemerke, dass für alle Punkte $x \in FP$ die Bedingung (3.14) erfüllt ist, das heißt, für all diese Punkte stimmt die von $\alpha_x(t_0)$ und $\beta_x(t_0)$ aufgespannte Ebene mit FP überein, insbesondere muss für all diese Punkte nur entlang der Linie $FL(t_0, t_2)$ gefiltert werden. Bemerke zudem, dass $\alpha_x(t)$ und $\beta_x(t)$ nur von der Richtung des Vektors $(x - a(t_0))$ abhängen, und nicht von seiner Länge. Diese Richtung parametrisieren wir durch Winkel η , indem wir $\{u(t_0, t_2)\}$ durch zwei orthonormale Vektoren $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{S}^2$ zu einer (rechtshändigen) Orthonormalbasis ergänzen, und die Vektoren $\alpha_x(t_0)$ und $\beta_x(t_0)$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\alpha_x(t_0) &= \cos(\eta)\kappa_1 + \sin(\eta)\kappa_2 \\ \beta_x(t_0) &= \sin(\eta)\kappa_1 - \cos(\eta)\kappa_2.\end{aligned}$$

Damit wird Θ^β aus (3.2) zu:

$$\Theta^\beta(\alpha_x(t_0), \gamma) = \cos(\eta - \gamma)\kappa_1 + \sin(\eta - \gamma)\kappa_2, \quad (3.44)$$

wobei $\eta \equiv \eta(x)$ von der Richtung des Vektors $\alpha_x(t_0)$ abhängt. Damit gilt für alle $x \in \Omega \cap FP$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(a(t_0), \alpha_x(t_0)) &= \int_0^{2\pi} (\partial \circ \mathcal{D}f)(a(t_0), \cos(\eta - \gamma)\kappa_1 + \sin(\eta - \gamma)\kappa_2) \frac{d\gamma}{\sin(\gamma)} \\ &=: \Psi_{t_0, t_2}(\eta).\end{aligned}$$

An dieser Darstellung erkennt man, dass $\Psi_{t_0, t_2}(\eta)$ ein Faltungsintegral ist, welches effizient mit Hilfe von FFT ausgewertet werden kann. Eine einzelne Anwendung der eindimensionalen schnellen Faltung liefert also Werte $\Psi_{t_0, t_2}(\eta)$ für alle $\eta \in [0, 2\pi)$, und somit auch $(\mathcal{H}^\beta \circ \partial \circ \mathcal{D}f)(a(t_0), \alpha_x(t_0))$ für alle Punkte x in der Ebene FP .

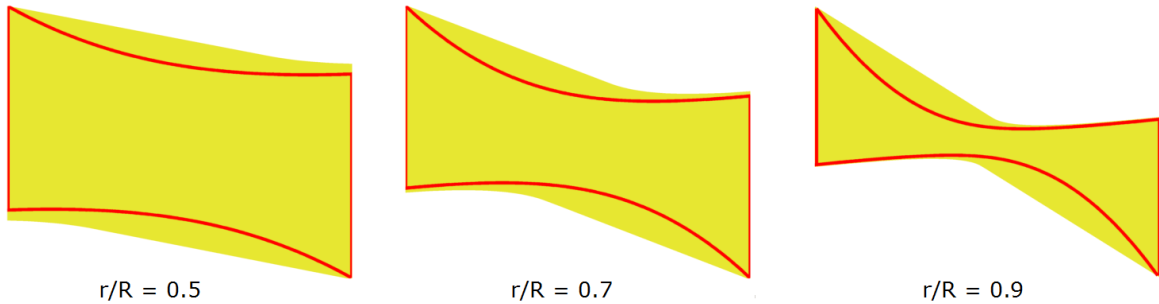


Abb. 3.14: Detektorfläche für verschiedene Verhältnisse von r zu R .

Die Rückprojektion $\mathcal{D}^\#$ ist aufwendig, aber man kann bei geschickter Implementierung die Berechnung auf mehrere Prozessoren aufteilen, siehe dazu etwa [YGBKZJ].

3 Algorithmus von Katsevich

Ein weiterer Vorteil dieses Algorithmus ist die Tatsache, dass der benötigte Detektor kaum größer als das theoretisch minimale Tam-Danielsson-Fenster ist. Auf der Abbildung 3.14 sind Detektorflächen für verschiedene Verhältnisse von r zu R und $h = R$ dargestellt. Die Umrisse des Tam-Danielsson-Fensters sind zum Vergleich ebenfalls eingezeichnet.

Wir fassen zusammen: der Algorithmus von Katsevich ist theoretisch exakt, numerisch stabil (siehe [Kat2]), lässt eine schnelle parallele Implementierung zu, benötigt nur wenig zusätzlichen Speicher sowie einen vergleichsweise kleinen Detektor, funktioniert auf einem weit verbreiteten Typ von Tomographen und lässt sich in viele Richtungen verallgemeinern. Das alles rechtfertigt die Einstufung dieses Algorithmus als wichtigen Durchbruch auf dem Gebiet der Spiral-Computertomographie.

4 Anhang

In diesem Anhang sind einige Rechnungen und Abschätzungen zu finden, die in den Beweisen verwendet werden, jedoch nicht direkt mit dem eigentlichen Thema zu tun haben, und austauschbar sind.

4.0.1 Rechnung (Verkettungen mit der Deltadistribution): Wir wollen hier kurz die Definitionen (2.4) und (2.5) begründen.

Beweis: Für die erste Definition berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 (\delta \circ g, \psi) &\equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(g(x))\psi(x)dx \\
 &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_{\varepsilon}(g(x))\psi(x)dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \int_{B_{r\nu}(\nu)} \delta_{\varepsilon}(g(x))\psi(x)dx \\
 &= \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{g(B_{r\nu}(\nu))} \delta_{\varepsilon}(z) \frac{\psi(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|} dz \\
 &= \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \frac{\psi(\nu)}{|g'(\nu)|}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist $(\delta_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ eine Diracfolge von C^{∞} -Funktionen mit $\text{supp}(\delta_{\varepsilon}) \subset\subset B_{\varepsilon}(0)$ (siehe dazu [W1, 1.IV Beispiel c)], und $B_{r\nu}(\nu)$ hinreichend kleine Umgebungen um die Nullstellen, auf den g ein Diffeomorphismus ist. Bemerke, dass für Funktionen f wie in (2.5) die Nullstellen des punktweisen Produktes $f \cdot g$ stets dieselben bleiben, daher gilt:

$$\begin{aligned}
 \delta \circ (f \cdot g) &= \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \frac{\delta_{\nu}(x)}{|g'(\nu)f(\nu) + g(\nu)f'(\nu)|} = \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \frac{\delta_{\nu}}{|g'(\nu)f(\nu)|} \\
 &= \frac{1}{|f|} \cdot \sum_{\nu \in g^{-1}(\{0\})} \frac{\delta_{\nu}}{|g'(\nu)|} = \frac{1}{|f|} \cdot (\delta \circ g).
 \end{aligned}$$

■

4.0.2 Rechnung (Signumfunktion aus dem Dirichlet-Integral):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{x} dx = -i\pi \operatorname{sgn}(t). \tag{4.1}$$

4 Anhang

Beweis: Für $t = 0$ ist die Gleichheit offensichtlich, für $t \neq 0$ erhält man mit der Substitution $z = |t|x$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B_{\varepsilon}(0)} \frac{e^{-itx}}{x} dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{itx}}{x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{-2i \sin(tx)}{x} dx \\
 &= -2i \operatorname{sgn}(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin(|t|x)}{|t|x} |t| dx \\
 &= -2i \operatorname{sgn}(t) \int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz \\
 &= -2i \operatorname{sgn}(t) \frac{\pi}{2} \\
 &= -\pi i \operatorname{sgn}(t).
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Wert des *Dirichlet-Integrals* eingesetzt. ■

4.0.3 Rechnung (Abschätzung mit Kotangens): Für $x \in (0, \pi)$ gilt die Ungleichung

$$x \cot(x) < 1. \tag{4.2}$$

Beweis: Für $x = \pi/2$ verschwindet die linke Seite. Für $x > \pi/2$ wird der Kotangens auf der linken Seite negativ, wie auch der ganze Term. Für $x \in (0, \pi/2)$ bringen wir den Kotangens auf die rechte Seite, und schätzen ab:

$$x = \int_0^x d\tau < \int_0^x 1 + \tan^2(\tau) d\tau = \int_0^x \tan'(\tau) d\tau = \tan(x) = \frac{1}{\cot(x)},$$

was insgesamt die Behauptung zeigt. ■

4.0.4 Rechnung (Abschätzung mit Sinus): Auf dem offenen Dreieck

$$\Delta := \left\{ \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \in (0, 2\pi)^2 \mid x > y \right\}$$

gilt die Ungleichung:

$$\sin(x - y) - \sin(x) + \sin(y) > 0. \tag{4.3}$$

Beweis: Die Funktion $F(x, y) := \sin(x - y) - \sin(x) + \sin(y)$ muss auf der kompakten Menge $\bar{\Delta}$ ein Minimum annehmen, wir untersuchen zuerst die Extrema auf dem offenen Kern. Der Gradient von F ist:

$$(\nabla F) \left(\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} \cos(x - y) - \cos(x) \\ -\cos(x - y) + \cos(y) \end{array} \right],$$

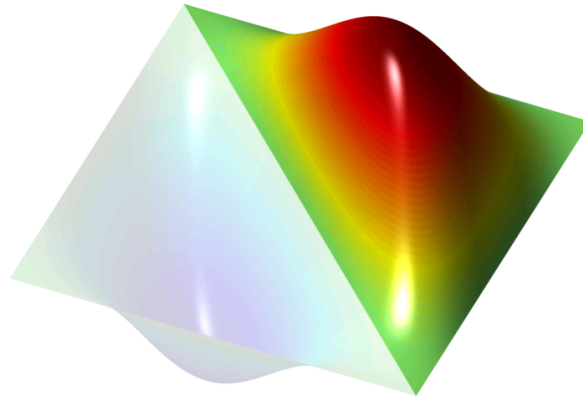


Abb. 4.1: Graph von $\sin(x - y) - \sin(x) + \sin(y)$ für $x > y$ (kontrastreich) bzw $x < y$ (bleich)

dieser verschwindet genau dann, wenn

$$\cos(x) = \cos(x - y) = \cos(y) =: \zeta$$

erfüllt ist. Wendet man die Additionstheoreme auf den zweiten Ausdruck an, liefert es zwei quadratische Gleichungen für ζ :

$$\zeta = \cos(y) \cos(x) + \sin(y) \sin(x) = \zeta^2 \pm \sqrt{1 - \zeta^2} = \begin{cases} 1 \\ 2\zeta^2 - 1 \end{cases}$$

mit möglichen Lösungen $\{1, -\frac{1}{2}\}$, von den nur die zweite im Bild des Kosinus über dem offenen Intervall $(0, 2\pi)$ liegt. Wegen der Einschränkung $x > y$ ist

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\pi/3 \\ 2\pi/3 \end{bmatrix}$$

das einzige Extremum. Der Wert von F an dieser Stelle ist $\frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$. Auf $\partial\Delta$ verschwindet F offenbar. Also wird das Minimum 0 nur auf dem Rand angenommen, im Inneren des Dreiecks bleibt F stets positiv, was äquivalent zur Behauptung ist. Für $x < y$ gilt eine völlig analoge Aussage (linke Teil des Graphen auf der Abbildung 4.1). ■

Literaturverzeichnis

- [DNK] Michel Defrise, Frédéric Noo, Hiroyuki Kudo „*A solution to the long-object problem in helical cone-beam tomography*“, 1999, Physics in Medicine and Biology, Volume 45, Number 3, pp 623-643
- [Kat1] Alexander Katsevich „*Theoretically exact FBP-Type inversion algorithm for spiral CT*“, 2002, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 62 No. 6 , pp 2012-2026
- [Kat2] Alexander Katsevich „*Improved exact FBP algorithm for spiral CT*“, 2002 (dies ist eine detailliertere Version von [Kat1]. Es wurde in keinem wissenschaftlichen Magazin veröffentlicht, wird aber stets von gängigen Suchmaschinen gefunden, erster Google-Treffer: http://people.csail.mit.edu/bkph/courses/papers/Exact_Conebeam/Katsevich_Cone_FBP_clean2.pdf)
- [ZYW] Shiyong Zhao, Hengyong Yu, Ge Wang „*A unified framework for exact cone-beam reconstruction formulas*“, 2005, Medical Physics 32 (6)
- [KatKap] Michael Kapralov, Alexander Katsevich „*Efficient inversion of the cone beam transform for a general class of curves*“, 2008 [<http://people.csail.mit.edu/kapralov/papers/ct/gen-curves-1.pdf>]
- [YGKZJ] Jiansheng Yang, Xiaohu Guo, Qiang Kong, Tie Zhou, Ming Jiang „*Parallel Implementation of Katsevich's FBP Algorithm*“, 2006, International Journal of Biomedical Imaging Volume 2006, Article ID 17463, pp 1-8
- [Wr] Dirk Werner „*Funktionalanalysis*“, Springer Verlag, Berlin, 2000
- [Wl] Wolfgang Walter „*Einfuehrung in die Theorie der Distributionen*“, Wissenschaftsverlag, 1994
- [GS] I.M. Gelfand und G.E. Schilow „*Verallgemeinerte Funktionen I*“, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960
- [FB] E.Freitag, R. Busam „*Funktionentheorie 1*“, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2006

Für die Erstellung von Skizzen wurden MATLAB, GeoGebra und GIMP verwendet. Dieser Text ist in \LaTeX mit TeXnicCenter verfasst worden.

5 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit in allen Teilen (mit Ausnahme dieser Selbstständigkeitserklärung) selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel (einschließlich elektronischer Medien und Online-Quellen) benutzt habe. Alle wörtlich oder sinngemäß übernommenen Textstellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Name: _____

Ort, Datum: _____

Unterschrift: _____